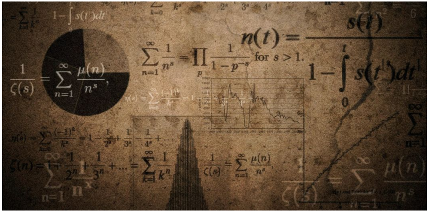
Problème 3 : Matrices et déterminants de GRAM

ET-TAHRI FOUAD

Ecole Royale de l'Air Marrakech
Koutoubia Prépas Marrakech



June 13, 2020

Rappel sur le déterminant

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

Rappel sur le déterminant

▶ Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} + \alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} + \alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} + \alpha b_3 \end{vmatrix} =$$

Rappel sur le déterminant

▶ Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Rappel sur le déterminant

▶ Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par $C_j + \sum_{k\neq j} \alpha_k C_k$.

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par

$$C_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k.$$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par $C_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

- Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) =$

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par $C_j + \sum\limits_{k \neq j} \alpha_k C_k$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

- Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) = 0$

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par $C_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

- Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) = 0$
- Si $C_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k$, alors $\det(A) =$

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par $C_j + \sum\limits_{k\neq j} \alpha_k C_k$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

- Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) = 0$
- Si $C_j = \sum\limits_{k\neq j} \alpha_k C_k$, alors $\det(A) = 0$

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par $C_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

- Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) = 0$
- Si $C_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k$, alors $\det(A) = 0$
- $\det(AB) =$

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par $C_j + \sum_{k\neq j} \alpha_k C_k$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

- Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) = 0$
- Si $C_j = \sum_{k\neq j} \alpha_k C_k$, alors $\det(A) = 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par

$$C_j + \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k.$$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

- Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) = 0$
- Si $C_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k$, alors $\det(A) = 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det({}^tA) =$

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par $C_j + \sum\limits_{k\neq j} \alpha_k C_k$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

- Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) = 0$
- Si $C_j = \sum\limits_{k\neq j} \alpha_k C_k$, alors $\det(A) = 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det({}^tA) = \det(A)$

Rappel sur le déterminant

▶ Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

▶ Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par

$$C_j + \sum_{k\neq j} \alpha_k C_k.$$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

▶ Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) = 0$

▶ Si $C_j = \sum\limits_{k\neq j} \alpha_k C_k$, alors $\det(A) = 0$

▶ $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

▶ $\det({}^tA) = \det(A)$

▶ Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A^{-1}) =$

Rappel sur le déterminant

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne (ligne).

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}+\alpha b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}+\alpha b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+\alpha b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$$

- Le déterminant est invariant lorsqu'on remplace C_j par $C_j + \sum\limits_{k \neq j} \alpha_k C_k$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A

- Si une ligne (resp. colonne) de A est nulle, alors $\det(A) = 0$
- Si $C_j = \sum\limits_{k \neq j} \alpha_k C_k$, alors $\det(A) = 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det({}^tA) = \det(A)$
- Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Rappel sur la projection orthogonale

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E =$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) =$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) =$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \ \ x - P_F(x) \in$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \ \ x - P_F(x) \in F^{\perp}$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^\perp$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \ \ x - P_F(x) \in F^\perp$ et $P_F(x) \in$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \ \ x - P_F(x) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \;\; x - P_F(x) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$
- Si $(v_1, ..., v_p)$ est une base orthonormée de F, alors

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \;\; x - P_F(x) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$
- Si $(v_1, ..., v_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$P_F(x) =$$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \ \ x - P_F(x) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$
- Si $(v_1, ..., v_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$P_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, v_k > v_k$$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \ \ x - P_F(x) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$
- Si $(v_1, ..., v_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$P_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, v_k > v_k$$

- On rappelle que

$$d(x, F) =$$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \ \ x - P_F(x) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$
- Si $(v_1, ..., v_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$P_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, v_k > v_k$$

- On rappelle que

$$d(x, F) = \min_{f \in F} ||x - f|| =$$

Rappel sur la projection orthogonale

Soit $(E, < \ >)$ un espace préhilbertien réel et F un sous espace vectoriel de E

- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$
- Si E est un espace euclidien, alors $\dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$
- La projection orthogonale P_F sur F est définie par :

Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^{\perp}$, alors $P_F(x) = y$

- $\forall x \in E, \ \ x - P_F(x) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$
- Si $(v_1, ..., v_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$P_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, v_k > v_k$$

- On rappelle que

$$d(x, F) = \min_{f \in F} ||x - f|| = ||x - P_F(x)||$$

Partie I : cas particuliers $p = 2$ ou 3

Correction da la question 1)

Correction da la question 1)

On $\forall i, j \in [\![1, p]\!], < a_i, a_j > = < a_j, a_i >$

Correction da la question 1)

On $\forall i, j \in [\![1, p]\!], < a_i, a_j > = < a_j, a_i >$
Donc $G(a_1, ..., a_p) = (< a_i, a_j >)_{1 \leq i,j \leq p}$ est symétrique.

Correction da la question 2)

Correction da la question 2)

On a $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_1 > & < a_2, a_2 > \end{vmatrix}$

Correction da la question 2)

On a $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_1 > & < a_2, a_2 > \end{vmatrix}$

Donc $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} ||a_1||^2 & < a_1, a_2 > \\ < a_1, a_2 > & ||a_2||^2 \end{vmatrix}$

Correction da la question 2)

On a $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_1 > & < a_2, a_2 > \end{vmatrix}$

Donc $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} ||a_1||^2 & < a_1, a_2 > \\ < a_1, a_2 > & ||a_2||^2 \end{vmatrix}$

D'où $g(a_1, a_2) = ||a_1||^2||a_2||^2 - (< a_1, a_2 >)^2 \geq 0$

Correction da la question 2)

On a $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_1 > & < a_2, a_2 > \end{vmatrix}$

Donc $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} ||a_1||^2 & < a_1, a_2 > \\ < a_1, a_2 > & ||a_2||^2 \end{vmatrix}$

D'où $g(a_1, a_2) = ||a_1||^2||a_2||^2 - (< a_1, a_2 >)^2 \geq 0$

Car : par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$| < a_1, a_2 > | \leq ||a_1||||a_2||$$

Correction da la question 2)

On a $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_1 > & < a_2, a_2 > \end{vmatrix}$

Donc $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} ||a_1||^2 & < a_1, a_2 > \\ < a_1, a_2 > & ||a_2||^2 \end{vmatrix}$

D'où $g(a_1, a_2) = ||a_1||^2||a_2||^2 - (< a_1, a_2 >)^2 \geq 0$

Car : par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$| < a_1, a_2 > | \leq ||a_1||||a_2||$$

On a

Correction da la question 2)

On a $g(a_1,a_2) = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_1 > & < a_2, a_2 > \end{vmatrix}$

Donc $g(a_1,a_2) = \begin{vmatrix} ||a_1||^2 & < a_1, a_2 > \\ < a_1, a_2 > & ||a_2||^2 \end{vmatrix}$

D'où $g(a_1,a_2) = ||a_1||^2||a_2||^2 - (< a_1, a_2 >)^2 \geq 0$

Car : par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$| < a_1, a_2 > | \leq ||a_1||||a_2||$$

On a

$$g(a_1,a_2) = 0 \iff ||a_1||^2||a_2||^2 - (< a_1, a_2 >)^2 = 0$$

Correction da la question 2)

On a $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_1 > & < a_2, a_2 > \end{vmatrix}$

Donc $g(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} ||a_1||^2 & < a_1, a_2 > \\ < a_1, a_2 > & ||a_2||^2 \end{vmatrix}$

D'où $g(a_1, a_2) = ||a_1||^2 ||a_2||^2 - (< a_1, a_2 >)^2 \geq 0$

Car : par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$| < a_1, a_2 > | \leq ||a_1|| ||a_2||$$

On a

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2) = 0 &\iff ||a_1||^2 ||a_2||^2 - (< a_1, a_2 >)^2 = 0 \\ &\iff | < a_1, a_2 > | = ||a_1|| ||a_2| \end{aligned}$$

Correction da la question 2)

On a $g(a_1,a_2) = \begin{vmatrix} <a_1,a_1> & <a_1,a_2> \\ <a_2,a_1> & <a_2,a_2> \end{vmatrix}$

Donc $g(a_1,a_2) = \begin{vmatrix} ||a_1||^2 & <a_1,a_2> \\ <a_1,a_2> & ||a_2||^2 \end{vmatrix}$

D'où $g(a_1,a_2) = ||a_1||^2||a_2||^2 - (<a_1,a_2>)^2 \geq 0$

Car : par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|<a_1,a_2>| \leq ||a_1||||a_2||$$

On a

$$\begin{aligned} g(a_1,a_2)=0 &\iff ||a_1||^2||a_2||^2 - (<a_1,a_2>)^2 = 0 \\ &\iff |<a_1,a_2>| = ||a_1||||a_2| \\ &\iff \text{la famille } (a_1,a_2) \text{ est liée} \end{aligned}$$

Correction da la question 3)a)

Correction da la question 3)a)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$

Correction da la question 3)a)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$
On a

Correction da la question 3)a)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$
On a

$$C_3 = \begin{pmatrix} < a_1, a_3 > \\ < a_2, a_3 > \\ < a_3, a_3 > \end{pmatrix}$$

Correction da la question 3)a)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$
On a

$$\begin{aligned} C_3 &= \begin{pmatrix} < a_1, a_3 > \\ < a_2, a_3 > \\ < a_3, a_3 > \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} < a_1, \alpha a_1 + \beta a_2 > \\ < a_2, \alpha a_1 + \beta a_2 > \\ < a_3, \alpha a_1 + \beta a_2 > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha < a_1, a_1 > + \beta < a_1, a_2 > \\ \alpha < a_2, a_1 > + \beta < a_2, a_2 > \\ \alpha < a_3, a_1 > + \beta < a_3, a_2 > \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Correction da la question 3)a)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$
On a

$$\begin{aligned}
C_3 &= \begin{pmatrix} < a_1, a_3 > \\ < a_2, a_3 > \\ < a_3, a_3 > \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} < a_1, \alpha a_1 + \beta a_2 > \\ < a_2, \alpha a_1 + \beta a_2 > \\ < a_3, \alpha a_1 + \beta a_2 > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha < a_1, a_1 > + \beta < a_1, a_2 > \\ \alpha < a_2, a_1 > + \beta < a_2, a_2 > \\ \alpha < a_3, a_1 > + \beta < a_3, a_2 > \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} < a_1, a_1 > \\ < a_2, a_1 > \\ < a_3, a_1 > \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_2 > \\ < a_3, a_2 > \end{pmatrix} = \alpha C_1 + \beta C_2
\end{aligned}$$

Correction da la question 3)a)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$
On a

$$\begin{aligned}
C_3 &= \begin{pmatrix} < a_1, a_3 > \\ < a_2, a_3 > \\ < a_3, a_3 > \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} < a_1, \alpha a_1 + \beta a_2 > \\ < a_2, \alpha a_1 + \beta a_2 > \\ < a_3, \alpha a_1 + \beta a_2 > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha < a_1, a_1 > + \beta < a_1, a_2 > \\ \alpha < a_2, a_1 > + \beta < a_2, a_2 > \\ \alpha < a_3, a_1 > + \beta < a_3, a_2 > \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} < a_1, a_1 > \\ < a_2, a_1 > \\ < a_3, a_1 > \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_2 > \\ < a_3, a_2 > \end{pmatrix} = \alpha C_1 + \beta C_2
\end{aligned}$$

Donc $g(a_1, a_2, a_3) = 0$,

Correction da la question 3)a)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$
On a

$$
\begin{aligned}
C_3 &= \begin{pmatrix} < a_1, a_3 > \\ < a_2, a_3 > \\ < a_3, a_3 > \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} < a_1, \alpha a_1 + \beta a_2 > \\ < a_2, \alpha a_1 + \beta a_2 > \\ < a_3, \alpha a_1 + \beta a_2 > \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha < a_1, a_1 > + \beta < a_1, a_2 > \\ \alpha < a_2, a_1 > + \beta < a_2, a_2 > \\ \alpha < a_3, a_1 > + \beta < a_3, a_2 > \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} < a_1, a_1 > \\ < a_2, a_1 > \\ < a_3, a_1 > \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} < a_1, a_2 > \\ < a_2, a_2 > \\ < a_3, a_2 > \end{pmatrix} = \alpha C_1 + \beta C_2
\end{aligned}
$$

Donc $g(a_1, a_2, a_3) = 0$, car $C_3 = \alpha C_1 + \beta C_2$.

Correction da la question 3)b)

Correction da la question 3)b)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$

Correction da la question 3)b)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$
On a $a_3 = P_F(a_3) + (a_3 - P_F(a_3))$

$$C_3 = \begin{pmatrix} < a_1, a_3 > \\ < a_2, a_3 > \\ < a_3, a_3 > \end{pmatrix}$$

Correction da la question 3)b)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$
On a $a_3 = P_F(a_3) + (a_3 - P_F(a_3))$

$$
\begin{aligned}
C_3 &= \begin{pmatrix} < a_1, a_3 > \\ < a_2, a_3 > \\ < a_3, a_3 > \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} < a_1, P_F(a_3) + (a_3 - P_F(a_3)) > \\ < a_2, P_F(a_3) + (a_3 - P_F(a_3)) > \\ < a_3, P_F(a_3) + (a_3 - P_F(a_3)) > \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Correction da la question 3)b)

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de $G(a_1, a_2, a_3)$
On a $a_3 = P_F(a_3) + (a_3 - P_F(a_3))$

$$
\begin{aligned}
C_3 &= \begin{pmatrix} < a_1, a_3 > \\ < a_2, a_3 > \\ < a_3, a_3 > \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} < a_1, P_F(a_3) + (a_3 - P_F(a_3)) > \\ < a_2, P_F(a_3) + (a_3 - P_F(a_3)) > \\ < a_3, P_F(a_3) + (a_3 - P_F(a_3)) > \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} < a_1, P_F(a_3) > \\ < a_2, P_F(a_3) > \\ < a_3, P_F(a_3) > \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} < a_1, a_3 - P_F(a_3) > \\ < a_2, a_3 - P_F(a_3) > \\ < a_3, a_3 - P_F(a_3) > \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Correction da la question 3)b)

Correction da la question 3)b)

Par linéarité du déterminant par rapport à la troisième colonne, on en déduit que

$$g(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & < a_1, a_3 > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & < a_2, a_3 > \\ < a_1, a_3 > & < a_2, a_3 > & < a_3, a_3 > \end{vmatrix}$$

Correction da la question 3)b)

Par linéarité du déterminant par rapport à la troisième colonne, on en déduit que

$$
\begin{aligned}
g(a_1, a_2, a_3) &= \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & < a_1, a_3 > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & < a_2, a_3 > \\ < a_1, a_3 > & < a_2, a_3 > & < a_3, a_3 > \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & < a_1, P_F(a_3) > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & < a_2, P_F(a_3) > \\ < a_1, a_3 > & < a_2, a_3 > & < a_3, P_F(a_3) > \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Correction da la question 3)b)

Par linéarité du déterminant par rapport à la troisième colonne, on en déduit que

$$\begin{aligned}
g(a_1,a_2,a_3) &= \begin{vmatrix} <a_1,a_1> & <a_1,a_2> & <a_1,a_3> \\ <a_1,a_2> & <a_2,a_2> & <a_2,a_3> \\ <a_1,a_3> & <a_2,a_3> & <a_3,a_3> \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} <a_1,a_1> & <a_1,a_2> & <a_1,P_F(a_3)> \\ <a_1,a_2> & <a_2,a_2> & <a_2,P_F(a_3)> \\ <a_1,a_3> & <a_2,a_3> & <a_3,P_F(a_3)> \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} <a_1,a_1> & <a_1,a_2> & <a_1,a_3-P_F(a_3)> \\ <a_1,a_2> & <a_2,a_2> & <a_2,a_3-P_F(a_3)> \\ <a_1,a_3> & <a_2,a_3> & <a_3,a_3-P_F(a_3)> \end{vmatrix} \\
&= D_1 + D_2
\end{aligned}$$

Correction da la question 3)b)

Correction da la question 3)b)

On a $< a_1, a_3 > = < a_1, P_F(a_3) >$, $< a_2, a_3 > = < a_2, P_F(a_3) >$ et $< a_3, P_F(a_3) > = < P_F(a_3), P_F(a_3) >$, car ....

Correction da la question 3)b)

On a $< a_1, a_3 >=< a_1, P_F(a_3) >$, $< a_2, a_3 >=< a_2, P_F(a_3) >$ et $< a_3, P_F(a_3) >=< P_F(a_3), P_F(a_3) >$, car ....
Donc

$$D_1 = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & < a_1, P_F(a_3) > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & < a_2, P_F(a_3) > \\ < a_1, P_F(a_3) > & < a_2, P_F(a_3) > & < P_F(a_3), P_F(a_3) > \end{vmatrix}$$

Correction da la question 3)b)

On a $< a_1, a_3 >=< a_1, P_F(a_3) >$, $< a_2, a_3 >=< a_2, P_F(a_3) >$ et $< a_3, P_F(a_3) >=< P_F(a_3), P_F(a_3) >$, car ....
Donc

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & < a_1, P_F(a_3) > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & < a_2, P_F(a_3) > \\ < a_1, P_F(a_3) > & < a_2, P_F(a_3) > & < P_F(a_3), P_F(a_3) > \end{vmatrix} \\ &= g(a_1, a_2, P_F(a_3)) \end{aligned}$$

Correction da la question 3)b)

Correction da la question 3)b)

On a

$$D_2 = \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & < a_1, a_3 - P_F(a_3) > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & < a_2, a_3 - P_F(a_3) > \\ < a_1, a_3 > & < a_2, a_3 > & < a_3, a_3 - P_F(a_3) > \end{vmatrix}$$

Correction da la question 3)b)

On a

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} <a_1,a_1> & <a_1,a_2> & <a_1,a_3-P_F(a_3)> \\ <a_1,a_2> & <a_2,a_2> & <a_2,a_3-P_F(a_3)> \\ <a_1,a_3> & <a_2,a_3> & <a_3,a_3-P_F(a_3)> \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} <a_1,a_1> & <a_1,a_2> & 0 \\ <a_1,a_2> & <a_2,a_2> & 0 \\ <a_1,a_3> & <a_2,a_3> & <a_3,a_3-P_F(a_3)> \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Correction da la question 3)b)

On a

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & < a_1, a_3 - P_F(a_3) > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & < a_2, a_3 - P_F(a_3) > \\ < a_1, a_3 > & < a_2, a_3 > & < a_3, a_3 - P_F(a_3) > \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & 0 \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & 0 \\ < a_1, a_3 > & < a_2, a_3 > & < a_3, a_3 - P_F(a_3) > \end{vmatrix} \\
&= < a_3, a_3 - P_F(a_3) > \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Correction da la question 3)b)

On a

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & < a_1, a_3 - P_F(a_3) > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & < a_2, a_3 - P_F(a_3) > \\ < a_1, a_3 > & < a_2, a_3 > & < a_3, a_3 - P_F(a_3) > \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > & 0 \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > & 0 \\ < a_1, a_3 > & < a_2, a_3 > & < a_3, a_3 - P_F(a_3) > \end{vmatrix} \\ &= < a_3, a_3 - P_F(a_3) > \begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & < a_1, a_2 > \\ < a_1, a_2 > & < a_2, a_2 > \end{vmatrix} \\ &= < a_3, a_3 - P_F(a_3) > g(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Correction da la question 3)b)

On a

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} <a_1,a_1> & <a_1,a_2> & <a_1,a_3-P_F(a_3)> \\ <a_1,a_2> & <a_2,a_2> & <a_2,a_3-P_F(a_3)> \\ <a_1,a_3> & <a_2,a_3> & <a_3,a_3-P_F(a_3)> \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} <a_1,a_1> & <a_1,a_2> & 0 \\ <a_1,a_2> & <a_2,a_2> & 0 \\ <a_1,a_3> & <a_2,a_3> & <a_3,a_3-P_F(a_3)> \end{vmatrix} \\
&= <a_3,a_3-P_F(a_3)> \begin{vmatrix} <a_1,a_1> & <a_1,a_2> \\ <a_1,a_2> & <a_2,a_2> \end{vmatrix} \\
&= <a_3,a_3-P_F(a_3)> g(a_1,a_2) \\
&= ||a_3-P_F(a_3)||^2 g(a_1,a_2)
\end{aligned}
$$

Correction da la question 3)b)

On a

$$\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} <a_1, a_1> & <a_1, a_2> & <a_1, a_3 - P_F(a_3)> \\ <a_1, a_2> & <a_2, a_2> & <a_2, a_3 - P_F(a_3)> \\ <a_1, a_3> & <a_2, a_3> & <a_3, a_3 - P_F(a_3)> \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} <a_1, a_1> & <a_1, a_2> & 0 \\ <a_1, a_2> & <a_2, a_2> & 0 \\ <a_1, a_3> & <a_2, a_3> & <a_3, a_3 - P_F(a_3)> \end{vmatrix} \\
&= <a_3, a_3 - P_F(a_3)> \begin{vmatrix} <a_1, a_1> & <a_1, a_2> \\ <a_1, a_2> & <a_2, a_2> \end{vmatrix} \\
&= <a_3, a_3 - P_F(a_3)> g(a_1, a_2) \\
&= ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2)
\end{aligned}$$

Ainsi $g(a_1, a_2, a_3) = D_1 + D_2 =$
$g(a_1, a_2, P_F(a_3)) + ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2)$

Correction da la question 3)c)

Correction da la question 3)c)

D'après la question précédente, on a
$g(a_1, a_2, a_3) = g(a_1, a_2, P_F(a_3)) + ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2)$

Correction da la question 3)c)

D'après la question précédente, on a
$g(a_1, a_2, a_3) = g(a_1, a_2, P_F(a_3)) + ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2)$
Comme $P_F(a_3) \in F = vect(a_1, a_2)$, alors
$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_F(a_3) = \alpha a_1 + \beta a_2$

Correction da la question 3)c)

D'après la question précédente, on a
$g(a_1, a_2, a_3) = g(a_1, a_2, P_F(a_3)) + ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2)$
Comme $P_F(a_3) \in F = vect(a_1, a_2)$, alors
$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_F(a_3) = \alpha a_1 + \beta a_2$
D'après la question 3)a), on obtient $g(a_1, a_2, P_F(a_3)) = 0$

Correction da la question 3)c)

D'après la question précédente, on a
$g(a_1, a_2, a_3) = g(a_1, a_2, P_F(a_3)) + ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2)$
Comme $P_F(a_3) \in F = vect(a_1, a_2)$, alors
$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_F(a_3) = \alpha a_1 + \beta a_2$
D'après la question 3)a), on obtient $g(a_1, a_2, P_F(a_3)) = 0$
Ainsi $g(a_1, a_2, a_3) = ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2) \geq 0$, car d'après 2)
$g(a_1, a_2) \geq 0$

Correction da la question 3)c)

D'après la question précédente, on a
$g(a_1, a_2, a_3) = g(a_1, a_2, P_F(a_3)) + ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2)$
Comme $P_F(a_3) \in F = vect(a_1, a_2)$, alors
$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_F(a_3) = \alpha a_1 + \beta a_2$
D'après la question 3)a), on obtient $g(a_1, a_2, P_F(a_3)) = 0$
Ainsi $g(a_1, a_2, a_3) = ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2) \geq 0$, car d'après 2)
$g(a_1, a_2) \geq 0$
On a

$$g(a_1, a_2, a_3) = 0 \iff a_3 = P_F(a_3) \text{ ou } g(a_1, a_2) = 0$$

Correction da la question 3)c)

D'après la question précédente, on a
$g(a_1, a_2, a_3) = g(a_1, a_2, P_F(a_3)) + ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2)$
Comme $P_F(a_3) \in F = vect(a_1, a_2)$, alors
$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_F(a_3) = \alpha a_1 + \beta a_2$
D'après la question 3)a), on obtient $g(a_1, a_2, P_F(a_3)) = 0$
Ainsi $g(a_1, a_2, a_3) = ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2) \geq 0$, car d'après 2)
$g(a_1, a_2) \geq 0$
On a

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2, a_3) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_3 = P_F(a_3) \text{ ou } g(a_1, a_2) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad a_3 \in vect(a_1, a_2) \text{ ou la famille } (a_1, a_2) \text{ est liée} \end{aligned}$$

Correction da la question 3)c)

D'après la question précédente, on a
$g(a_1,a_2,a_3) = g(a_1,a_2,P_F(a_3)) + ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1,a_2)$
Comme $P_F(a_3) \in F = vect(a_1,a_2)$, alors
$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_F(a_3) = \alpha a_1 + \beta a_2$
D'après la question 3)a), on obtient $g(a_1,a_2,P_F(a_3)) = 0$
Ainsi $g(a_1,a_2,a_3) = ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1,a_2) \geq 0$, car d'après 2)
$g(a_1,a_2) \geq 0$
On a

$$\begin{aligned} g(a_1,a_2,a_3) = 0 &\iff a_3 = P_F(a_3) \text{ ou } g(a_1,a_2) = 0 \\ &\Longrightarrow a_3 \in vect(a_1,a_2) \text{ ou la famille } (a_1,a_2) \text{ est liée} \\ &\Longrightarrow \text{la famille } (a_1,a_2,a_3) \text{ est liée} \end{aligned}$$

Correction da la question 3)c)

D'après la question précédente, on a

$g(a_1, a_2, a_3) = g(a_1, a_2, P_F(a_3)) + ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2)$

Comme $P_F(a_3) \in F = vect(a_1, a_2)$, alors

$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P_F(a_3) = \alpha a_1 + \beta a_2$

D'après la question 3)a), on obtient $g(a_1, a_2, P_F(a_3)) = 0$

Ainsi $g(a_1, a_2, a_3) = ||a_3 - P_F(a_3)||^2 g(a_1, a_2) \geq 0$, car d'après 2) $g(a_1, a_2) \geq 0$

On a

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2, a_3) = 0 \iff & \quad a_3 = P_F(a_3) \text{ ou } g(a_1, a_2) = 0 \\ \implies & \quad a_3 \in vect(a_1, a_2) \text{ ou la famille } (a_1, a_2) \text{ est liée} \\ \implies & \quad \text{la famille } (a_1, a_2, a_3) \text{ est liée} \end{aligned}$$

La réciproque est similaire à 3)a)

Partie II : cas général

Correction de la question 1)a)

Correction de la question 1)a)

Correction de la question 1)a)

On pose $b_i = a_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j$

Correction de la question 1)a)

On pose $b_i = a_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j$ Si, on applique l'opération

$C_i \hookleftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$, alors le déterminant $g(a_1, \cdots, a_p)$ reste

inchangé et est égale à

Correction de la question 1)a)

On pose $b_i = a_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j$ Si, on applique l'opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$, alors le déterminant $g(a_1, \cdots, a_p)$ reste inchangé et est égale à

$$\begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & \cdots & < a_1, b_i > & < a_1, a_{i+1} > & \cdots & < a_1, a_p > \\ < a_2, a_1 > & \cdots & < a_2, b_i > & < a_2, a_{i+1} > & \cdots & < a_2, a_p > \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ < a_i, a_1 > & \cdots & < a_i, b_i > & < a_i, a_{i+1} > & \cdots & < a_i, a_p > \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ < a_p, a_1 > & \cdots & < a_p, b_i > & < a_p, a_{i+1} > & \cdots & < a_p, a_p > \end{vmatrix}$$

Correction de la question 1)a)

Correction de la question 1)a)

puis, on applique l'opération $L_i \hookleftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$, alors le déterminant $g(a_1, \cdots, a_p)$ reste inchangé et est égale à

Correction de la question 1)a)

puis, on applique l'opération $L_i \hookleftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$, alors le déterminant $g(a_1, \cdots, a_p)$ reste inchangé et est égale à

$$\begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & \cdots & < a_1, b_i > & < a_1, a_{i+1} > & \cdots & < a_1, a_p > \\ < a_2, a_1 > & \cdots & < a_2, b_i > & < a_2, a_{i+1} > & \cdots & < a_2, a_p > \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ < b_i, a_1 > & \cdots & < b_i, b_i > & < b_i, a_{i+1} > & \cdots & < b_i, a_p > \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ < a_p, a_1 > & \cdots & < a_p, b_i > & < a_p, a_{i+1} > & \cdots & < a_p, a_p > \end{vmatrix}$$

Correction de la question 1)a)

puis, on applique l'opération $L_i \hookleftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j L_j$, alors le déterminant $g(a_1, \cdots, a_p)$ reste inchangé et est égale à

$$\begin{vmatrix} < a_1, a_1 > & \cdots & < a_1, b_i > & < a_1, a_{i+1} > & \cdots & < a_1, a_p > \\ < a_2, a_1 > & \cdots & < a_2, b_i > & < a_2, a_{i+1} > & \cdots & < a_2, a_p > \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ < b_i, a_1 > & \cdots & < b_i, b_i > & < b_i, a_{i+1} > & \cdots & < b_i, a_p > \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ < a_p, a_1 > & \cdots & < a_p, b_i > & < a_p, a_{i+1} > & \cdots & < a_p, a_p > \end{vmatrix}$$

D'aù $g(a_1, \cdots, a_p) = g(a_1, \cdots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \cdots, a_p) = g(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j, a_{i+1}, \cdots, a_p)$

Correction de la question 1)b)

Correction de la question 1)b)

Si la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ est liée, alors

Correction de la question 1)b)

Si la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ est liée, alors
$\exists i \in [\![1, p]\!]$ et $(\beta_j)_{j \neq i}$ est une famille de $p-1$ réels telle que

$$a_i = \sum_{j \neq i} \beta_j a_j$$

Correction de la question 1)b)

Si la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ est liée, alors
$\exists i \in [\![1, p]\!]$ et $(\beta_j)_{j \neq i}$ est une famille de $p-1$ réels telle que

$$a_i = \sum_{j \neq i} \beta_j a_j$$

En posant, $\lambda_j = -\beta_j$, alors $a_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j = 0$

Correction de la question 1)b)

Si la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ est liée, alors
$\exists i \in [\![1, p]\!]$ et $(\beta_j)_{j \neq i}$ est une famille de $p-1$ réels telle que

$$a_i = \sum_{j \neq i} \beta_j a_j$$

En posant, $\lambda_j = -\beta_j$, alors $a_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j = 0$
Donc $g(a_1, \cdots, a_p) = g(a_1, \cdots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \cdots, a_p) = 0$

Correction de la question 1)b)

Si la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ est liée, alors
$\exists i \in [\![1, p]\!]$ et $(\beta_j)_{j\neq i}$ est une famille de $p-1$ réels telle que

$$a_i = \sum_{j\neq i} \beta_j a_j$$

En posant, $\lambda_j = -\beta_j$, alors $a_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j a_j = 0$
Donc $g(a_1, \cdots, a_p) = g(a_1, \cdots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \cdots, a_p) = 0$
Car la colonne numéro i est nulle

Correction de la question 2)a)

Correction de la question 2)a)

Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$

Correction de la question 2)a)

Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$

$$(a_i, a_j) = \left(\sum_{k'=1}^{p} b_{k',i} e_{k'}, \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} e_k \right)$$

Correction de la question 2)a)

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$

$$\begin{aligned}(a_i, a_j) &= \left(\sum_{k'=1}^{p} b_{k',i} e_{k'}, \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} e_k\right)\\ &= \sum_{k'=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} b_{k',i} b_{k,j} (e_{k'}, e_k)\end{aligned}$$

Correction de la question 2)a)

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$

$$\begin{aligned}
(a_i, a_j) &= \left(\sum_{k'=1}^{p} b_{k',i} e_{k'}, \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} e_k\right) \\
&= \sum_{k'=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} b_{k',i} b_{k,j} (e_{k'}, e_k) \\
&= \sum_{k'=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} b_{k',i} b_{k,j} \delta_{k',k}
\end{aligned}$$

Correction de la question 2)a)

Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$

$$
\begin{aligned}
(a_i, a_j) &= \left(\sum_{k'=1}^{p} b_{k',i} e_{k'}, \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} e_k \right) \\
&= \sum_{k'=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} b_{k',i} b_{k,j} (e_{k'}, e_k) \\
&= \sum_{k'=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} b_{k',i} b_{k,j} \delta_{k',k} \\
&= \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} b_{k,j}
\end{aligned}
$$

Correction de la question 2)b)

Correction de la question 2)b)

Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$

Correction de la question 2)b)

Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$

D'après la question précédente, on a

Correction de la question 2)b)

Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$
D'après la question précédente, on a

$$(a_i, a_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} b_{k,j}$$

Correction de la question 2)b)

Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$
D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}(a_i, a_j) &= \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} b_{k,j} \\ &= ({}^t B.B)_{i,j}\end{aligned}$$

Correction de la question 2)b)

Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$
D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} (a_i, a_j) &= \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} b_{k,j} \\ &= ({}^t B.B)_{i,j} \end{aligned}$$

Donc $G(a_1, \ldots, a_p) = {}^t BB$.

Correction de la question 2)c)

Correction de la question 2)c)

Comme $G(a_1, \cdots, a_p) = {}^tBB$.

Correction de la question 2)c)

Comme $G(a_1, \cdots, a_p) = {}^tBB$.
Alors $g(a_1, \cdots, a_p) = (\det(B))^2$

Correction de la question 2)c)

Comme $G(a_1, \cdots, a_p) = {}^tBB$.
Alors $g(a_1, \cdots, a_p) = (\det(B))^2$
Comme $B = Mat_{(e_1,\cdots,e_p)}(a_1, \cdots, a_p)$ est la matrice de la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ dans la base $(e_1, \cdots, e_p)$

Correction de la question 2)c)

Comme $G(a_1, \cdots, a_p) = {}^tBB$.
Alors $g(a_1, \cdots, a_p) = (\det(B))^2$
Comme $B = Mat_{(e_1,\cdots,e_p)}(a_1, \cdots, a_p)$ est la matrice de la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ dans la base $(e_1, \cdots, e_p)$
Or $(a_1, \cdots, a_p)$ est libre

Correction de la question 2)c)

Comme $G(a_1, \cdots, a_p) = {}^tBB$.
Alors $g(a_1, \cdots, a_p) = (\det(B))^2$
Comme $B = Mat_{(e_1,\cdots,e_p)}(a_1, \cdots, a_p)$ est la matrice de la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ dans la base $(e_1, \cdots, e_p)$
Or $(a_1, \cdots, a_p)$ est libre
Alors B est inversible

Correction de la question 2)c)

Comme $G(a_1, \cdots, a_p) = {}^tBB$.
Alors $g(a_1, \cdots, a_p) = (\det(B))^2$
Comme $B = Mat_{(e_1,\cdots,e_p)}(a_1, \cdots, a_p)$ est la matrice de la famille $(a_1, \cdots, a_p)$ dans la base $(e_1, \cdots, e_p)$
Or $(a_1, \cdots, a_p)$ est libre
Alors B est inversible
Par suite $g(a_1, \cdots, a_p) = (\det(B))^2 > 0$

Correction de la question 3)a)i)

Correction de la question 3)a)i)

On a

Correction de la question 3)a)i)

On a

$$Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(v_1,\cdots,v_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de la question 3)a)i)

On a

$$Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(v_1,\cdots,v_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\det(Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(v_1,\cdots,v_n)) = 1 \neq 0$

Correction de la question 3)a)i)

On a

$$Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(v_1,\cdots,v_n)=\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\\ 0 & \ddots & & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc $\det(Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(v_1,\cdots,v_n))=1\neq 0$
Ainsi $Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(v_1,\cdots,v_n)$ est inversible

Correction de la question 3)a)i)

On a

$$Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(v_1,\cdots,v_n)=\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\\ 0 & \ddots & & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc $\det(Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(v_1,\cdots,v_n))=1\neq 0$
Ainsi $Mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(v_1,\cdots,v_n)$ est inversible
Par suite $(v_1,\cdots,v_n)$ est libre.

Correction de la question 3)a)ii)

Correction de la question 3)a)ii)

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

Correction de la question 3)a)ii)

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

On a $v_i = \sum_{r=1}^{i} e_r$ et $v_j = \sum_{s=1}^{j} e_s$

Correction de la question 3)a)ii)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

On a $v_i = \sum_{r=1}^{i} e_r$ et $v_j = \sum_{s=1}^{j} e_s$

$$< v_i, v_j > \quad = \quad \left\langle \sum_{r=1}^{i} e_r, \sum_{s=1}^{j} e_s \right\rangle$$

Correction de la question 3)a)ii)

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

On a $v_i = \sum_{r=1}^{i} e_r$ et $v_j = \sum_{s=1}^{j} e_s$

$$
\begin{aligned}
< v_i, v_j > &= \left\langle \sum_{r=1}^{i} e_r, \sum_{s=1}^{j} e_s \right\rangle \\
&= \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} < e_r, e_s >
\end{aligned}
$$

Correction de la question 3)a)ii)

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

On a $v_i = \sum_{r=1}^{i} e_r$ et $v_j = \sum_{s=1}^{j} e_s$

$$\begin{aligned} < v_i, v_j > &= \left\langle \sum_{r=1}^{i} e_r, \sum_{s=1}^{j} e_s \right\rangle \\ &= \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} < e_r, e_s > \\ &= \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \delta_{r,s} \end{aligned}$$

Correction de la question 3)a)ii)

Correction de la question 3)a)ii)

Si $i \leq j$

Correction de la question 3)a)ii)

Si $i \leq j$

$$< v_i, v_j > \;=\; \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \delta_{r,s}$$

Correction de la question 3)a)ii)

Si $i \leq j$

$$\begin{aligned} < v_i, v_j > &= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\delta_{r,s} \\ &= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{i}\delta_{r,s} + \underbrace{\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=i+1}^{j}\delta_{r,s}}_{=0} \end{aligned}$$

Correction de la question 3)a)ii)

Si $i \leq j$

$$\begin{aligned} < v_i, v_j > &= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\delta_{r,s} \\ &= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{i}\delta_{r,s} + \underbrace{\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=i+1}^{j}\delta_{r,s}}_{=0} \\ &= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{i}\delta_{r,s} \end{aligned}$$

Correction de la question 3)a)ii)

Si $i \leq j$

$$
\begin{aligned}
< v_i, v_j > &= \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \delta_{r,s} \\
&= \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{i} \delta_{r,s} + \underbrace{\sum_{r=1}^{i} \sum_{s=i+1}^{j} \delta_{r,s}}_{=0} \\
&= \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{i} \delta_{r,s} \\
&= \sum_{r=1}^{i} \delta_{r,r} = i
\end{aligned}
$$

Correction de la question 3)a)ii)

Si $i \leq j$

$$\begin{aligned}
< v_i, v_j > &= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{j}\delta_{r,s} \\
&= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{i}\delta_{r,s} + \underbrace{\sum_{r=1}^{i}\sum_{s=i+1}^{j}\delta_{r,s}}_{=0} \\
&= \sum_{r=1}^{i}\sum_{s=1}^{i}\delta_{r,s} \\
&= \sum_{r=1}^{i}\delta_{r,r} = i
\end{aligned}$$

Si $i \geq j$, par symétrie, on obtient $< v_i, v_j >=< v_j, v_i >= j$

Correction de la question 3)a)ii)

Si $i \leq j$

$$\begin{aligned}
< v_i, v_j > &= \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{j} \delta_{r,s} \\
&= \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{i} \delta_{r,s} + \underbrace{\sum_{r=1}^{i} \sum_{s=i+1}^{j} \delta_{r,s}}_{=0} \\
&= \sum_{r=1}^{i} \sum_{s=1}^{i} \delta_{r,s} \\
&= \sum_{r=1}^{i} \delta_{r,r} = i
\end{aligned}$$

Si $i \geq j$, par symétrie, on obtient $< v_i, v_j > = < v_j, v_i > = j$
On en déduit alors que $< v_i, v_j > = \min(i, j)$

Correction de la question 3)a)ii

Correction de la question 3)a)ii

Comme $a_{i,j} = \min(i, j) =< v_i, v_j >$

Correction de la question 3)a)ii

Comme $a_{i,j} = \min(i, j) =< v_i, v_j >$
Alors A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$

Correction de la question 3)a)ii

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$
Alors elle est symétrique

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$
Alors elle est symétrique
Par suite elle est orthogonalement diagonalisable (Théorème spectral)

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$
Alors elle est symétrique
Par suite elle est orthogonalement diagonalisable (Théorème spectral)
D'après la question 2)b), il existe B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tBB$

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$
Alors elle est symétrique
Par suite elle est orthogonalement diagonalisable (Théorème spectral)
D'après la question 2)b), il existe B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tBB$
Soit $\lambda \in sp(A_n)$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$
Alors elle est symétrique
Par suite elle est orthogonalement diagonalisable (Théorème spectral)
D'après la question 2)b), il existe B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tBB$
Soit $\lambda \in sp(A_n)$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Alors ${}^tXAX = \lambda ||X||^2$

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$
Alors elle est symétrique
Par suite elle est orthogonalement diagonalisable (Théorème spectral)
D'après la question 2)b), il existe B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tBB$
Soit $\lambda \in sp(A_n)$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Alors ${}^tXAX = \lambda ||X||^2$
D'autre par ${}^tXA_nX = \lambda ||BX||^2 \geq 0$

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$
Alors elle est symétrique
Par suite elle est orthogonalement diagonalisable (Théorème spectral)
D'après la question 2)b), il existe B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tBB$
Soit $\lambda \in sp(A_n)$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Alors ${}^tXAX = \lambda ||X||^2$
D'autre par ${}^tXA_nX = \lambda ||BX||^2 \geq 0$
Donc $\lambda \geq 0$

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$
Alors elle est symétrique
Par suite elle est orthogonalement diagonalisable (Théorème spectral)
D'après la question 2)b), il existe B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tBB$
Soit $\lambda \in sp(A_n)$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Alors ${}^tXAX = \lambda ||X||^2$
D'autre par ${}^tXA_nX = \lambda ||BX||^2 \geq 0$
Donc $\lambda \geq 0$
Comme A_n est inversible, car la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre

Correction de la question 3)a)ii

Comme A_n est la matrice de Gram des vecteurs $v_1, \cdots, v_n$
Alors elle est symétrique
Par suite elle est orthogonalement diagonalisable (Théorème spectral)
D'après la question 2)b), il existe B une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tBB$
Soit $\lambda \in sp(A_n)$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Alors ${}^tXAX = \lambda||X||^2$
D'autre par ${}^tXA_nX = \lambda||BX||^2 \geq 0$
Donc $\lambda \geq 0$
Comme A_n est inversible, car la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre
Alors $\lambda > 0$

Correction de la question 3)b)

Correction de la question 3)b)

On considère l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], < \ >)$ où

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

Correction de la question 3)b)

On considère l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], < \ >)$ où

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P_k = X^{k-1}$

Correction de la question 3)b)

On considère l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], < \ >)$ où

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P_k = X^{k-1}$

Alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$

Correction de la question 3)b)

On considère l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], < \ >)$ où

$< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P_k = X^{k-1}$

Alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$

$$< P_i, P_j > \ = \ \int_0^1 t^{i+j-2}dt$$

Correction de la question 3)b)

On considère l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], < \ >)$ où

$< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P_k = X^{k-1}$

Alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} < P_i, P_j > &= \int_0^1 t^{i+j-2} dt \\ &= \frac{1}{i+j-1} \end{aligned}$$

Correction de la question 3)b)

On considère l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], < \ >)$ où

$< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P_k = X^{k-1}$

Alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} < P_i, P_j > &= \int_0^1 t^{i+j-2} dt \\ &= \frac{1}{i+j-1} \end{aligned}$$

Donc H est la matrice de Gram des vecteurs $P_1, \cdots, P_n$

Correction de la question 3)b)

On considère l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], < \ >)$ où

$< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P_k = X^{k-1}$

Alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} < P_i, P_j > &= \int_0^1 t^{i+j-2} dt \\ &= \frac{1}{i+j-1} \end{aligned}$$

Donc H est la matrice de Gram des vecteurs $P_1, \cdots, P_n$

Comme $(P_1, \cdots, P_n) = (1, X, \cdots, X^{n-1})$ est libre

Correction de la question 3)b)

On considère l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], < \ >)$ où

$< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$

On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P_k = X^{k-1}$

Alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} < P_i, P_j > &= \int_0^1 t^{i+j-2}dt \\ &= \frac{1}{i+j-1} \end{aligned}$$

Donc H est la matrice de Gram des vecteurs $P_1, \cdots, P_n$

Comme $(P_1, \cdots, P_n) = (1, X, \cdots, X^{n-1})$ est libre

Alors H est inversible

Partie III : Application au calcul de la distance à un sous-espace vectoriel

Correction de la question 1)

Correction de la question 1)

Par un raisonnement similaire à la question 3)b) du partie I

Correction de la question 1)

Par un raisonnement similaire à la question 3)b) du partie I
C'est à dire, on écrit $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$, puis on applique la linéarité du déterminant par rapport à la dernière ligne.

Correction de la question 2)

Correction de la question 2)

D'après la question précédente, on a

$$g(v_1, \dots, v_n, x) = g(v_1, \dots, v_n, P_F(x)) + ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \dots, v_n)$$

Correction de la question 2)

D'après la question précédente, on a

$$g(v_1,\ \ldots, v_n, x) = g(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x)) + ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \ldots, v_n)$$

Comme $P_F(x) \in F = vect(v_1,\ \ldots, v_n)$

Correction de la question 2)

D'après la question précédente, on a

$$g(v_1,\ \dots, v_n, x) = g(v_1,\ \dots, v_n, P_F(x)) + ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \dots, v_n)$$

Comme $P_F(x) \in F = vect(v_1,\ \dots, v_n)$
Alors la famille $(v_1,\ \dots, v_n, P_F(x))$ est liée

Correction de la question 2)

D'après la question précédente, on a

$$g(v_1,\ \ldots, v_n, x) = g(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x)) + ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \ldots, v_n)$$

Comme $P_F(x) \in F = vect(v_1,\ \ldots, v_n)$
Alors la famille $(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x))$ est liée
Donc $g(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x)) = 0$

Correction de la question 2)

D'après la question précédente, on a

$$g(v_1,\ \ldots, v_n, x) = g(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x)) + ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \ldots, v_n)$$

Comme $P_F(x) \in F = vect(v_1,\ \ldots, v_n)$
Alors la famille $(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x))$ est liée
Donc $g(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x)) = 0$
D'où $g(v_1,\ \ldots, v_n, x) = ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \ldots, v_n)$

Correction de la question 2)

D'après la question précédente, on a

$$g(v_1,\ \ldots, v_n, x) = g(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x)) + ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \ldots, v_n)$$

Comme $P_F(x) \in F = vect(v_1,\ \ldots, v_n)$
Alors la famille $(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x))$ est liée
Donc $g(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x)) = 0$
D'où $g(v_1,\ \ldots, v_n, x) = ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \ldots, v_n)$
Comme $d(x, F) = ||x - P_F(x)||$

Correction de la question 2)

D'après la question précédente, on a

$$g(v_1,\ \ldots, v_n, x) = g(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x)) + ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \ldots, v_n)$$

Comme $P_F(x) \in F = vect(v_1,\ \ldots, v_n)$
Alors la famille $(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x))$ est liée
Donc $g(v_1,\ \ldots, v_n, P_F(x)) = 0$
D'où $g(v_1,\ \ldots, v_n, x) = ||x - P_F(x)||^2 g(v_1 \ldots, v_n)$
Comme $d(x, F) = ||x - P_F(x)||$
Alors

$$d(x,\ F) = \sqrt{\frac{g(v_1, ..., v_n, x)}{g(v_1, ..., v_n)}}.$$

Merci pour votre attention