Espaces vectoriels de dimension finie

1 Dimension finie

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Définition.

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemples.

- $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie puisqu'il admet une famille génératrice (une base) finie : sa base canonique.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie.
- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie : en effet supposons avoir une famille génératrice $(P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$. Alors tout polynôme serait combinaison linéaire de $P_1, \ldots, P_n$, donc de degré $\leq m = \max(d^\circ P_1, \ldots, d^\circ P_n)$.

1.1 Existence de bases

Propriété 1 (Théorème de la base extraite)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base (finie) de E.

Preuve. Puisque E est de dimension finie, il existe $\mathcal{G} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice finie de E. Notons :

$$A = \{Card(\mathcal{F}), \mathcal{F} \subset \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F} \text{ génératrice de } E\}.$$

La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide (car contient $Card(G)$). Elle admet un plus petit élément p. Soit F une famille de cardinal p contenue dans G et génératrice de E. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$.
Montrons que $\mathcal{F}$ est une base. Elle est génératrice par définition. Montrons qu'elle est libre.
Par l'absurde, supposons $(e_1, \ldots, e_p)$ liée. Alors l'un des vecteurs de $(e_1, \ldots, e_p)$, disons e_p (quitte à les réordonner) est combinaison linéaire des autres. Ainsi $e_p \in Vect(e_1, \ldots, e_{p-1})$.
Pour $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in Vect(e_1, \ldots, e_{p-1})$$

car $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice et $e_p \in Vect(e_1, \ldots, e_{p-1})$. Ainsi $Vect(e_1, \ldots, e_{p-1}) = E$ et $(e_1, \ldots, e_{p-1})$ est génératrice de E donc $p - 1 \in A$, ce qui est absurde.
Ainsi $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre et génératrice de E. C'est donc une base de E. $\square$

Comme conséquence, on a :

Propriété 2 (Existence de base dans un espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. E admet au moins une base (finie).

Théorème 3 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Preuve. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathcal{G}$. Notons :

$$A = \{Card(\mathcal{F}) | \mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G} \text{ et } \mathcal{F} \text{ libre } \}.$$

La partie A de $\mathbb{N}$ est non vide (car contient $Card(\mathcal{L})$) et majoré (par $Card(\mathcal{L} \cup \mathcal{G})$). Elle admet donc un plus grand élément $p \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de E de cardinal p telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$. Notons $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$.
Montrons que $\mathcal{F}$ est une base. On sait par définition qu'elle est libre. Reste donc à montrer qu'elle est génératrice. Pour cela on va montrer que $\mathcal{G} \subset Vect(e_1, ..., e_p)$.
Par l'absurde, supposons que $\mathcal{G} \not\subset Vect(e_1, \ldots, e_p)$. On a alors $x \in \mathcal{G}$ tel que $x \notin Vect(e_1, \ldots, e_p)$. La famille $(e_1, \ldots, e_p, x)$ est alors libre, elle contient $\mathcal{L}$ et est contenue dans $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ (puisque $x \in \mathcal{G}$). Ainsi $p + 1 \in A$ ce qui est absurde par définition de p.
Ainsi $\mathcal{G} \subset Vect(e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice de E. Comme elle est libre, c'est bien une base de E. $\square$

Comme conséquence de la preuve précédente, on obtient :

Propriété 4

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E, alors, on peut à l'aide d'éléments de $\mathcal{G}$ la compléter en une base de E.

1.2 Dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Lemme. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base de cardinal n. Alors toute famille constituée d'au moins $n + 1$ vecteurs est liée.

Preuve. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille d'éléments de E avec $p > n$. Pour tout $i \in [|1, p|]$, on pose $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j$.
Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p = 0$.

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0 \iff \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i,1}\right) e_1 + ... + \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i,n}\right) e_n = 0_E$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i,1} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_{i,n} = 0 \end{cases} \quad \text{car } (e_1, ..., e_n) \text{ est une famille libre .}$$

Ce système est homogènes et a plus d'inconnues p que d'équations n. Il admet donc une solution non nulle $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0)$. La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est donc liée. $\square$

On en déduit le corollaire suivant.

Propriété 5

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont même nombre d'éléments.

Preuve. Soient B_1 et B_2 deux bases de E, de cardinaux respectifs n et p. Supposons $n \neq p$. Par exemple $p > n$. D'après la proposition précédente, B_1 est liée. Contradiction avec le fait que ce soit une base. $\square$

Définition.

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$. On appelle dimension de E et on note $\dim(E)$ le cardinal de chacune de ses bases.
- Si $E = \{0\}$, on pose par convention $\dim(E) = 0$.

Exemples.

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$ car admet pour base $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$.
- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$ car admet pour base $(1, X, \ldots, X^n)$.
- $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$ admet pour base $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$

Exemples. Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + 3y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$.
3. $E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ a + d = 0 \right\}$.

Exercice. Calculer $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

Propriété 6

Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie, et :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

Preuve. Considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $(f_1, \ldots, f_q)$ une base de F, et la famille $\mathcal{B}$ suivante :

$$\mathcal{B} = ((e_1, 0_F), \ldots, (e_p, 0_F), (0_E, f_1), \ldots, (0_F, f_q)).$$

On montre que $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de $E \times F$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base finie de $E \times F$. $E \times F$ est donc de dimension finie, et :

$$\dim(E \times F) = p + q = \dim(E) + \dim(F).$$

$\square$

Remarque. Ce résultat se généralise par récurrence : si $E_1, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

En particulier si $E_1 = \cdots = E_n = \mathbb{K}$, on retrouve que $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Propriété 7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :

(1) Toute famille libre de E admet au plus n éléments.

(2) Toute famille génératrice de E admet au moins n éléments.

Preuve.

(1) C'est une conséquence d'une proposition précédente.

(2) Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E de cardinal p. D'après le théorème de la base extraite, on peut a extraire de $\mathcal{F}$ une base de E. Son cardinal est alors $n \leq p$.

□

Propriété 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille **formée de n éléments**. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E\ .$$

Preuve.

- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, elle est libre et génératrice (par définition).
- Supposons $(e_1, \ldots, e_n)$ libre. Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E. Or $p = \dim(E) = n$, donc $(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.
- Supposons $(e_1, \ldots, e_n)$ génératrice. Par le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E. Or $p = \dim(E) = n$, donc $(e_1, \ldots, e_n) = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.

□

Exemple. Montrer que $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple. Notons $T_i \in \mathbb{R}[X]$ le i-ième polynôme de Tchebytchev. Montrons que $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

- On avait montré que $\deg(T_i) = i$. La famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est de degrés échelonnés, et donc libre.
- $(T_0, \ldots, T_n)$ est une famille de $(n+1)$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$. C'est donc une base.

1.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille de vecteurs de E. On appelle rang de $(e_1, \ldots, e_p)$ et on note $rg(e_1, \ldots, e_p)$ la dimension de $Vect(e_1, \ldots, e_p)$.

Remarque. Le rang est bien défini puisque $Vect(e_1, \ldots, e_p)$ est de dimension finie : il admet $(e_1, \ldots, e_p)$ comme famille génératrice finie.

Propriété 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dimension finie n. Soit $(e_1, ..., e_p) in E^p$. On a :

(1) $rg(e_1, \dots, e_p) \leq \min(p, n)$.

(2) La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si et seulement si $rg(e_1, \dots, e_p) = p$.

(3) La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E si et seulement si $rg(e_1, \dots, e_p) = n$.

Preuve.

(1) Soit $(f_1, \dots, f_r)$ une base de $Vect(e_1, \dots, e_p)$ (avec $r = rg(e_1, \dots, e_p)$). Alors $(f_1, \dots, f_r)$ est libre dans E, donc a moins d'éléments qu'une base de E. Ainsi $r \leq n$.

De même, $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de $Vect(e_1, \dots, e_p)$, donc $rg(Vect(e_1, \dots, e_p)) \leq p$.

(2) Supposons $(e_1, \dots, e_p)$ libre. Comme elle est génératrice de $Vect(e_1, \dots, e_p)$, c'est alors une base de $Vect(e_1, \dots, e_p)$ et $rg(e_1, \dots, e_p) = p$. Réciproquement supposons que $rg(e_1, \dots, e_p) = p$. Alors $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de $Vect(e_1, \dots, e_p)$ et a autant d'éléments que $\dim(Vect(e_1, \dots, e_p))$, donc c'en est une base. En particulier c'est une famille libre.

(3) Supposons $(e_1, \dots, e_p)$ génératrice de E. Alors $Vect(e_1, \dots, e_p) = E$, donc $rg(e_1, \dots, e_p) = \dim(E) = n$. Réciproquement, supposons que $rg(e_1, \dots, e_p) = n$. De $(e_1, \dots, e_p)$, génératrice de $Vect(e_1, \dots, e_p)$, on peut extraire une base $(f_1, \dots, f_n)$ de $Vect(e_1, \dots, e_p)$ (par le théorème de la base extraite). La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E, et a $n = \dim(E)$ éléments. C'est donc une base de E. Ainsi, $E = Vect(f_1, ..., fn) \subset Vect(e_1, ..., e_p)$ donc $Vect(e_1, \dots, e_p) = E$ et $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de E.

$\square$

Exemple. Déterminons le rang de la famille suivante :

$$x_1 = (1, -1, 1),\ x_2 = (-1, 1, -1),\ x_3 = (0, 1, 1),\ x_4 = (1, 0, 2).$$

Nous avons quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. On sait déjà que cette famille est nécessairement liée. Soit λ_1, λ_2, λ_3, $\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$. On a :

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 \\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient un système homogène, échelonné réduit. Il possède deux inconnues principales λ_1, λ_3, deux inconnues paramètres λ_2, λ_4 (on retrouve bien que cette famille est liée). On obtient alors :

- pour $\lambda_2 = 1, \lambda_4 = 0$: $x_2 = -x_1$;
- pour $\lambda_2 = 0, \lambda_4 = 1$: $x_4 = x_1 + x_3$.

Ainsi, on a $Vect(x_1, x_2, x_3, x_4) = Vect(x_1, x_3)$. Comme la famille (x_1, x_3) est libre (deux vecteurs non colinéaires, ou autrement en prenant $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ dans le système ci-dessus), on en déduit que $rg(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$.

2 Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

2.1 Dimension

Propriété 10

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

(1) F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$;

(2) $F = E \quad \Leftrightarrow \quad \dim(F) = \dim(E)$.

► *Pour montrer que $F = E$, il suffit de montrer que F est un sev de E et que* $\dim(F) = \dim(E)$.

Preuve.

(1) On suppose $F \neq \{0_E\}$, sinon c'est évident. Considérons la partie de $\mathbb{N}$ suivante :

$$A = \{Card(\mathcal{L}|\mathcal{L} \text{ famille libre de } F\}.$$

On a $A \neq \emptyset$ car pour tout $x \in F$, $x \neq 0_E$, (x) est une famille libre. De plus A est majorée par $\dim(E)$, car si $\mathcal{L}$ est une famille libre de F, c'est une famille libre de E et donc $Card(\mathcal{L}) \leq \dim(E)$. A possède donc un plus grand élément p.

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de F telle que $Card(\mathcal{F}) = p$. Alors $\mathcal{F}$ est une famille libre. Elle est de plus génératrice car si $x \in F$, $x \notin Vect(\mathcal{F})$, alors $\mathcal{F} \cup \{x\}$ serait une famille libre de F à $p+1$ éléments. Ainsi $\mathcal{F}$ est génératrice de F. Comme elle est libre, c'est bien une base de F. On a finalement $\dim(F) = Card(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.

(2) Si $F = E$, on a clairement $\dim(F) = \dim(E)$. Réciproquement si $\dim(F) = \dim(E) = n$, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de F. Mais $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E à $n = \dim(E)$ éléments. C'est donc une base de E, et $F = Vect(e_1, \dots, e_p) = E$.

□

Vocabulaire. Soit E un espace vectoriel.

- Un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 est appelé une **droite vectorielle**. Ce sont les sous-espaces vectoriels de la forme $Vect(x)$, avec x un vecteur non nul.
- Un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 est appelé un **plan vectoriel**. Ce sont les sous-espaces vectoriels de la forme $Vect(x, y)$ avec x, y des vecteurs non colinéaires.
- Si de plus E est de dimension finie, un sous-espace vectoriel de dimension $\dim(E) - 1$ est appelé **hyperplan de** E.

Remarque. Un hyperplan du plan est une droite vectorielle. Un hyperplan de l'espace est un plan vectoriel.

Exemple. $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$ est un plan vectoriel de l'espace $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Propriété 11

Tout sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Preuve. Comme F est un sous-espace d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F est de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. C'est une famille libre de E, donc on peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (par le théorème de la base incomplète). On a $F = Vect(e_1, \ldots, e_p)$, posons $G = Vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. On a vu au chapitre précédent qu'alors $F \oplus G = E$. $\square$

Propriété 12

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque E tels que $F + G$ soit directe. Alors on a :

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Preuve. Posons $E_1 = F \oplus G$. Alors F et G sont supplémentaires dans E_1. En concaténant une base de F et une base de G, on obtient donc une base de E_1. Ainsi $\dim(E_1) = \dim(F) + \dim(G)$. $\square$

Conséquence. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Alors tout supplémentaire de F est de dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Propriété 13 (Formule de Grassman)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque E. Alors on a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier, $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$.

Preuve. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$, qu'on complète en :

- $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ une base de F ;
- $(e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_r)$ une base de G.

Montrons que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_r)$ est une base de $F + G$.

- $\mathcal{B}$ est génératrice de $F + G$:
- $\mathcal{B}$ est libre dans $F + G$:

$\square$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminons l'intersection de deux plans vectoriels P_1, P_2 non confondues.

- Comme $P_1 + P_2 \subset E$, on a $\dim(P_1 + P_2) \leq 3$, donc :

  $$\dim(P_1 \cap P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2) - \dim(P_1 + P_2) \geq 2 + 2 - 3 = 1$$

  ce qui prouve que $P_1 \cap P_2$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
- Comme P_1 et P_2 ne sont pas confondues, P_1 est strictement inclus dans $P_1 + P_2$ donc $\dim(P_1) < \dim(P_1 + P_2)$.

Ainsi, on a $\dim(P_1 + P_2) = 3$ et donc $\dim(P_1 \cap P_2) = 1$: $P_1 \cap P_2$ est une droite vectoriel.

Propriété 14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous espaces vectoriels de E. On a les équivalences suivantes :

$$(i)\ E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad (ii) \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (iii) \begin{cases} F + G = E \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$$

Preuve.

- (i) entraine immédiatement (ii) et (iii).
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons (iii). D'après la formule de Grassmann, on a :

  $$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 0$$

  et donc $F \cap G = \{0\}$.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons (ii). D'après la formule de Grassmann, on a :

  $$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E)$$

  Comme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que $F + G = E$.
  De plus $F \cap G = \{0\}$ donc la somme $F + G$ est directe. Ainsi, $F \oplus G = E$.

□

Exemple. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et H un hyperplan de E de dimension $n - 1$. Alors pour tout $a \in E \backslash H$, on a :

$$H \oplus \mathbb{K}.a = E.$$

En effet, on a :

- $\dim(H) + \dim(\mathbb{K}.a) = n = \dim(E)$ (car $a \neq 0$ sinon $a \in H$) ;
- $H \cap Vect(a) \subset Vect(a)$, donc $\dim(H \cap Vect(a)) = 0$ ou 1. Si c'est 1, alors $H \cap Vect(a) = Vect(a)$ et a appartiendrait à H, ce qui est faux. Donc $\dim(H \cap Vect(a)) = 0$ et $H \cap Vect(a) = \{0_E\}$.