1. Espaces probabilisés

Exercice 1 *Solution*
On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtension d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs?

Exercice 2 (Lemme de Borel Cantelli) *Solution*
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
① ***Montrer que, si les événements A_n sont deux à deux incompatibles, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.***
② ***Montrer que, si la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k\right) = 0$.***

Exercice 3 *Solution*
Une urne A contient 6 boules blanches et 5 noires, tandis qu'une urne B contient 4 boules blanches et 8 boules noires. On transfère aléatoirement deux boules de l'urne B dans l'urne A, puis on tire une boule dans l'urne A.
① ***Calculer la probabilité que l'on tire une boule blanche.***
② ***On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'au moins une boule blanche ait été transférée de l'urne B à l'urne A.***

Exercice 4 *Solution*
Un fumeur essaye de ne plus fumer. S'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $p \in]0,1[$. S'il fume un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $1-p$.
On note p_n la probabilité que cette personne ne fume pas le n-ème jour.
① ***Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.***
② ***En déduire une expression de p_n.***
③ ***Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter le résultat.***

Exercice 5 *Solution*
Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a où $a \in [\![0, N]\!]$. Si à l'instant n sa position est x_n, à l'instant $n+1$ on a $x_{n+1} = x_n + 1$ avec une probabilité p et x_{n-1} avec une probabilté $1-p$. Le processus se termine lorsque $x_n = 0$ ou $x_n = N$.
Soit p_a la probabilité pour que, partant de a, le processus se termine en 0.
① ***Calculer p_0 et p_N.***
② ***On suppose que $0 < a < N$. Montrer que $p_a = pp_{a+1} + (1-p)p_{a-1}$.***
③ ***En déduire p_a.***
④ ***On note q_a la probabilité pour que, partant de a, le processus se termine au point N. Calculer $p_a + q_a$. Que peut-on en déduire ?***

Exercice 6 (Indicatrice d'Euler) *Solution*
Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n : Soient p un diviseur positif de n et A_p l'événement : " le nombre choisi est divisible par p".
① ***Vérifier que $P(A_p) = \frac{1}{p}$.***
② ***Soient $p_1, p_2, ..., p_r$ les diviseurs premiers de n.***
(a) ***Montrer que les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, ..., A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.***
(b) ***On désigne par $\varphi(n)$ la fonction indicatrice d'Euler définie sur $\mathbb{N}^*$ par***

$$\varphi(n) = Card\{k \in [\![1, n]\!],\ \ k \wedge n = 1\}$$

i) ***Exprimer l'événement A " le nombre choisi est premier avec n" en fonction de $A_{p_1}, A_{p_2}, ..., A_{p_r}$.***
ii) ***En déduire que***

$$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \text{ divise } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

2. Variables aléatoires de lois discrètes

Exercice 7 *Solution*

Soit $p \in]0,1[$. On considère une pièce amenant pile avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à l'obtension pour la deuxième fois pile.

On note X le nombre de faces obtenus lors de cette expérience.

① ***Déterminer la loi de X.***

② ***Montrer que X admet une espérance et la calculer.***

Exercice 8 *Solution*

Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes). On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.

Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.

La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.

Les tirs de laser sont indépendants.

La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.

Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

① ***Déterminer la loi de X.***

② ***Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.***

③ ***En déduire que X admet une espérance et la calculer.***

Exercice 9 *Solution*

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Déterminer la loi de $Y = Min(X_1, X_2)$ ainsi que la loi de $Z = Max(X_1, X_2)$.

Exercice 10 *Solution*

Soit X une variable aléatoire définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda >$.

On pose $Y = \cos(\pi X)$.

① ***Vérifier que Y est une variable aléatoire réelle.***

② ***Déterminer la loi de X.***

Exercice 11 *Solution*

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et $p \in]0,1[$.

On considère n variables aléatoires $X_1, X_1, ..., X_n$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \min\limits_{1 \leq i \leq n} (X_i)$.

① ***Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y_n > k)$. En déduire $P(Y_n \leq k)$, puis $P(Y_n = k)$.***

② ***Reconnaitre la loi de Y_n. En déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.***

Exercice 12 *Solution*

① ***Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.***

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$$

② ***On suppose que $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge. Démontrer que X admet une espérance.***

③ ***Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Démontrer alors que $(n\mathbb{P}(X > n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, puis que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge, et enfin que***

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

Exercice 13 ***Solution***
On dispose d'une urne contenant N boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à N. On effectue, à partir de cette urne, n tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note X le plus grand nombre obtenu.
① ***Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $\mathbb{P}(X \leq k)$? En déduire la loi de X.***
② ***à l'aide de l'exercice précédent, vérifier que $\mathbb{E}(X) = N - \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.***
③ ***En déduire que $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.***

Exercice 14 (D'après CNC 2017) ***Solution***
On dispose d'un jeton non truqué à deux faces numérotées 1 et 2 et d'un dé tétraédriques (famille des pyramides de quatre faces triangulaires), équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
On lance le jeton et on note N le numéro obtenu, puis on lance N fois le dé et pour chaque lancer, on note le numéro de la face d'appui du dé. Soit S la somme des numéros obtenus lors des ces N lancers, (si $N = 1$, le dé est lancé une seule fois et S est le numéro lu sur la face d'appui du dé).
① ***Déterminer la loi de N.***
② ***Donner la loi conditionnelle de S sachant $[N = k]$, pour $k = 1$, puis pour $k = 2$.***
③ ***En déduire la loi de S, puis son espérance et sa variance.***

Exercice 15 (D'après CCP 2016) ***Solution***
① ***Démontrer que la famille $\left(\frac{n+m}{2^{n+m}}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.***
② ***Soit X et Y deux variables aléatoires sur un meme espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.***
On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \ \ \mathbb{P}(X = n, Y = m) = \frac{n+m}{2^{n+m+3}}$$

(a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.
(b) Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une meme loi.
(c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes.

Exercice 16 ***Solution***
Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Montrer que $Y = \frac{1}{X+1}$ admet une espérance et la caculer

3. Variables aléatoires de lois continues

Exercice 17 ***Solution***
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Détérminer la loi de $Y = -\ln(X)$. Reconnaitre la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 18 ***Solution***
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et suivant la loi normale centrée réduite: $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ si $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$) .
On dit qu'une variable aléatoire Z suit la loi Gamma de paramètre (α, λ) où $\alpha, \lambda > 0$ et on note $Z \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ si $f_Z(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} e^{-\frac{x}{2}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$.
Où $\forall x > 0, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
① ***En utilisant, la loi normale centrée réduite, calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.***
② ***On considère la variable aléatoire $Y = X^2$.***
(a) Exprimer F_Y en fonction de F_X.
(b) En déduire que $Y = X^2$ suit la loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Exercice 19 ***Solution***
Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout réel x, $[x]$ désigne la partie entière de x.
On définit l'application $Y = [X]$ partie entière de X.
① ***Vérifier que Y est une variable aléatoire.***
② ***Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y = k-1)$.***
③ ***En déduire que $Y+1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.***
④ ***En déduire l'espérance et la variance de $Y+1$, puis l'espérance et la variance de Y.***

Exercice 20 ***Solution***
Soit X une variable aléatoire réelle et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

On suppose que X et Y sont indépendantes et on définit l'application T par $T = \frac{X}{Y}$.

① ***Justifier que T est une variable aléatoire réelle.***
② ***Vérifier que pour tout réel t, $(T > t) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} (Y = k) \cap (X > tk)$.***
③ ***En déduire que pour tout réel t, $\mathbb{P}(T > t) = \begin{cases} \frac{pe^{-\lambda t}}{1-(1-p)e^{-\lambda t}} & si\ t \geq 0 \\ 1 & si\ t < 0 \end{cases}$.***
④ ***Montrer que T suit une loi continue, puis déterminer sa fonction de densité f_T.***

Exercice 21 (D'après CNC 2019) ***Solution***
Pour tout entier naturel n, on définit la fonction g_n de la variable réelle x par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

① ***Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction g_n est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.***
② ***Pour tous $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$ et $I_n(a) = \int_0^a g_n(x)dx$.***
(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a > 0$, établir une relation entre les intégrales $I_n(a)$ et $I_{n+2}(a)$ à l'aide d'une intégration par parties puis en déduire que $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
(b)En utilisant la loi normale centrée réduite, justifier que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
(c) Calculer la valeur de l'intégrale I_1 et montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^n n!} \quad \textit{et} \quad I_{2n+1} = 2^n n!$$

③ ***Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \textbf{si } x \geq 0, \\ 0 & \textbf{si } x < 0. \end{cases}$***
(a) Démontrer que g est une densité de probabilité.
(b) Soit X une variable aléatoire réelle admettant g comme densité de probabilité. Justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$ puis préciser leur valeur.
(c) On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives des variables aléatoires X et $Y = X^2$. Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ en fonction de $F(\sqrt{x})$, puis en déduire que Y est une variable à densité. Reconnaitre la loi de Y et donner la valeur de son espérance $\mathbb{E}(Y)$ et de sa variance $\mathbb{V}(Y)$.

4. Fonctions génératrices

Exercice 22 (D'après CCP 2019) ***Solution***
Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer pour tout $t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

Exercice 23 ***Solution***
Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$. Déterminer, en calculant sa fonction génératrice, la loi de $X_1 + X_2 + ... + X_n$.

5. Inégalités et théorèmes limites

Exercice 24 ***Solution***

Soit n ***un entier naturel et*** X ***une variable aléatoire suivant la loi géométrique*** $\mathcal{G}(\frac{1}{n})$.

① ***Montrer que*** $\mathbb{P}(X \geqslant n^2) \leqslant \frac{1}{n}$.

② ***Montrer que*** $\mathbb{P}(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 25 ***Solution***

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***une suite de réels de*** $[0,1]$ ***tel que*** $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ ***et*** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***une suite de variable aléatoire telle que*** X_n ***suit la loi binomiale de paramétre*** (n, p_n).

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge en loi vers*** X ***où*** X ***suit la loi de Poisson de paramètre*** λ.

Exercice 26 ***Solution***

Appliquer le théorème central limite à une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ***de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre*** 1***, pour démontrer que*** $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n^k}{k!} = \dfrac{1}{2}$.

Corrigés d'exercices

Espaces probabilisés

Solution de l'exercice №1 Retour à l'énoncé

Pour tout $n \geq 1$, on considère les événements A " Tous les nombres obtenus soient pairs " et A_n " Les n premiers nombres obtenus sont pairs ". Comme la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n$, alors $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{6}\right)^n = 0$ ⊠

Solution de l'exercice №2 Retour à l'énoncé

① Comme les événements A_n sont deux à deux incompatibles, alors la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente et sa somme est égale à $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$, en particulier $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

② On suppose que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \subset \bigcup_{k\geq n} A_k$, donc $0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$.

Puisque la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente, alors $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par suite $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 0$ ⊠

Solution de l'exercice №3 Retour à l'énoncé

Notons B l'évènement " on a tiré une boule blanche " et pour $i \in [\![0, 2]\!]$, A_i l'évènement "on a transféré i boules blanches de l'urne B dans l'urne A".
On a $\mathbb{P}(A_0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{28}{66}$, $\mathbb{P}(A_1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{32}{66}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{66}$.
① Comme (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B/A_0)\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B/A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B/A_2)\mathbb{P}(A_2) = \frac{6}{13} \times \frac{28}{66} + \frac{7}{13} \times \frac{32}{66} + \frac{8}{13} \times \frac{6}{66} = \frac{220}{429}$.
② On utilise la formule de Bayes
$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2/B) = \mathbb{P}(A_1/B) + \mathbb{P}(A_2/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(B/A_2)\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{429}{220} \times \frac{7}{13} \times \frac{32}{66} + \frac{429}{220} \times \frac{8}{13} \times \frac{6}{66} = \frac{34}{55}$ ⊠

Solution de l'exercice №4 Retour à l'énoncé

① Notons A_n l'évènement " Cette personne ne fume pas le n-ème jour ".
Par la formule des probabilités totales, on a
$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}/A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}/A_n^c)\mathbb{P}(A_n^c) = pp_n + (1-p)(1-p_n)$
Ainsi $p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)$.
② On reconnait une suite arithmético-géométrique. Son expression générale est
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ p_n = (2p-1)^n p_0 + \frac{1}{2}$.
③ On a $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$. Lorsque n est grand, on n'a plus aucune indication permettant de savoir si la personne ne fume pas le n-ème jour ou non ⊠

Solution de l'exercice №5 Retour à l'énoncé

① $p_0 = 1$ et $p_N = 0$.
② On suppose que $0 < a < N$.
Notons A_a l'événement " Le processus se termine en 0, en partant de a"
$p_a = \mathbb{P}(A_a) = \mathbb{P}(A_a/A_{a+1})\mathbb{P}(A_{a+1}) + \mathbb{P}(A_a/A_{a-1})\mathbb{P}(A_{a-1}) = pp_{a+1} + (1-p)p_{a-1}$.
③ On a $pp_{a+1} - p_a + (1-p)p_{a-1}$, donc $(p_a)_{0\leq a\leq N}$ est suite réccurente linéaire d'ordre 2 d'équation caractériqtique (c) : $pr^2 - r + (1-p) = 0$.
On remarque que $r_1 = 1$ est une racine de (c), donc l'autre racine est $r_2 = \frac{1-p}{p}$.
• Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors (c) admet deux racices réelles distincts r_1 et r_2, dans ce cas $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tels que

$p_a = \alpha r_1^n + \beta r_2^a = \alpha + \beta(\frac{1-p}{p})^a$. **Puisque** $p_0 = 1$ **et** $p_N = 0$**, alors**

$$\forall a \in [\![0, N]\!], p_a = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}$$

• **Si** $p = \frac{1}{2}$**, alors** (c) **admet une racine double** $r_1 = r_2 = 1$**, dans ce cas** $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$**, tels que** $p_a = (\alpha a + \beta) r_1^a = \alpha a + \beta$. **Puisque** $p_0 = 1$ **et** $p_N = 0$**, alors**

$$\forall a \in [\![0, N]\!], p_a = \frac{N-a}{N}$$

④ **De meme, on a** $\begin{cases} q_0 = 0,\ q_N = 1 \\ \forall a \in [\![1, N-1]\!],\ q_a = p q_{a+1} + (1-p) q_a \end{cases}$

• **Si** $p \neq \frac{1}{2}$**, on trouve**

$$\forall a \in [\![0, N]\!], q_a = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}$$

• **Si** $p = \frac{1}{2}$**, on trouve** $\forall a \in [\![0, N]\!], q_a = \frac{a}{N}$.

• $\forall a \in [\![0, N]\!], p_a + q_a = 1$**, ceci justifie bien que le processus se termine au point** 0 **ou** N ⊠

Solution de l'exercice №6 **Retour à l'énoncé**

Comme p **est un diviseur positif de** n**,** $\exists q \in \mathbb{N}, n = pq$.

① **Soit** $c \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned} c \in A_p &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, c = kp \\ &\iff \exists k \in [\![1, q]\!], c = kp, \quad car\ \ 1 \leqslant c \leqslant n \Leftrightarrow 1 \leqslant kp \leqslant pq \Leftrightarrow 1 \leqslant k \leqslant q \\ &\iff c \in \{p, 2p, 3p, ..., qp\} \end{aligned}$$

Ainsi $A_p = \{p, 2p, 3p, ..., qp\}$**, par suite** $\mathbb{P}(A_p) = \frac{Card(A_p)}{Card([\![1,n]\!])} = \frac{q}{n} = \frac{1}{p}$.

② **(a) Montrons que les événements** $A_{p_1}, A_{p_2}, ..., A_{p_r}$ **sont mutuellement indépendants.**

Soit $J = \{n_1, ..., n_s\}$ **une partie (fini) de** $[\![1, r]\!]$**, a-t-on** $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant k \leqslant s} A_{p_{n_k}}\right) = \prod_{k=1}^{s} \mathbb{P}(A_{p_{n_k}})$

$$\begin{aligned} c \in \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant s} A_{p_{n_k}} &\iff \forall k \in [\![1, s]\!], c \in A_{p_{n_k}} \\ &\iff \forall k \in [\![1, s]\!], p_{n_k}\ divise\ c \\ &\iff \forall k \in [\![1, s]\!], \prod_{k=1}^{s} p_{n_k}\ divise\ c \\ &\qquad \textbf{car des nombres premiers distincts sont premiers entre eux} \\ &\iff c \in A_p\ avec\ p = \prod_{k=1}^{s} p_{n_k} \end{aligned}$$

Ainsi $\bigcap_{1 \leqslant k \leqslant s} A_{p_{n_k}} = A_p$ **avec** $p = \prod_{k=1}^{s} p_{n_k}$

Par suite $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leqslant k \leqslant s} A_{p_{n_k}}\right) = \mathbb{P}(A_p) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{s} p_{n_k}} = \prod_{k=1}^{s} \frac{1}{p_{n_k}} = \prod_{k=1}^{s} \mathbb{P}(A_{p_{n_k}})$.

(b) i) Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned} k\in A &\iff k\wedge n=1\\ &\iff \forall i\in[\![1,r]\!], k\wedge p_i=1,\ car\ p_1,p_2,...,p_r \textbf{ les diviseurs premiers de } n\\ &\iff \forall i\in[\![1,r]\!], p_i \textbf{ ne divise pas } k\\ &\iff \forall i\in[\![1,r]\!], k\in (A_{p_i})^c\\ &\iff k\in\bigcap_{i=1}^{r}(A_{p_i})^c \end{aligned}$$

Ainsi $A=\bigcap\limits_{i=1}^{r}(A_{p_i})^c$.

ii) On a $\mathbb{P}(A)=\frac{Card(A)}{Card([\![1,n]\!]}=\frac{Card\{k\in[\![1,n]\!],\ k\wedge n=1\}}{n}=\frac{\varphi(n)}{n}$.

D'autre part , puisque les événements $A_{p_1},A_{p_2},...,A_{p_r}$ **sont mutuelements indépendants, alors** $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{r}(A_{p_i})^c\right)=\prod\limits_{i=1}^{r}\mathbb{P}\left((A_{p_i})^c\right)=\prod\limits_{i=1}^{r}(1-\mathbb{P}(A_{p_i})=\prod\limits_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$. **Par suite**

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=n\prod_{\substack{p\ premier\\ p\ divise\ n}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\boxtimes$$

Variables aléatoires de lois discrètes

Solution de l'exercice №7 Retour à l'énoncé

① **On** $X(\Omega)=\mathbb{N}$**, soit** $n\in\mathbb{N}$.

L'événement $(X=n)$ **signifie qu'on a obtenu** n **faces et** 2 **piles, dont le dernier lancé donne pile et pour la première pille, on a** $(n+1)$ **possibilité, ainsi** $\mathbb{P}(X=n)=(n+1)p^2(1-p)^n$.

② **Montrons que la famille** $(n\mathbb{P}(X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ **est sommable.**

Comme $(n\mathbb{P}(X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ **est une suite positive, il suffit de montrer que la série** $\sum\limits_{n\geqslant0}n\mathbb{P}(X=n)$ **est convergente.**

On a $\forall n\in\mathbb{N},\ n\mathbb{P}(X=n)=p^2n(n+1)(1-p)^n=(p^2(1-p))(n(n+1)(1-p)^{n-1})$.

Comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant0}x^n$ **est de rayon** 1 **et sa somme** $\frac{1}{1-x}$**, alors la série dérivée d'ordre** 2**,** $\sum\limits_{n\geqslant2}n(n-1)x^{n-2}$ **est de rayon** 1 **et sa somme** $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{''}=\frac{2}{(1-x)^3}$**, par un changement d'indice, la série** $\sum\limits_{n\geqslant1}n(n+1)x^{n-1}$ **est de rayon** 1 **et sa somme** $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{''}=\frac{2}{(1-x)^3}$.

Puisque $(1-p)\in]0,1[$**, alors la série** $\sum\limits_{n\geqslant1}n(n+1)(1-p)^{n-1}$ **converge, ainsi** $\sum\limits_{n\geqslant1}n\mathbb{P}(X=n)$**, converge, par suite** X **admet une espérance et**

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}n\mathbb{P}(X=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\mathbb{P}(X=n)=p^2(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)(1-p)^{n-1}=p^2(1-p)\frac{2}{p^3}=\frac{2(1-p)}{p}$$

Solution de l'exercice №8 Retour à l'énoncé

① **On a** $X(\Omega)=[\![r,+\infty[\![=\mathbb{N}\setminus[\![0,r-1]\!]$**, soit** $n\in[\![r,+\infty[\![$.

L'événement $(X=n)$ **signifie que** n **tirs de laser ont été nécessaires pour tuer la bactérie, C'est-à-dire que, sur les** $n-1$ **premiers tirs de laser, la bactérie est touchée** $(r-1)$ **fois, non touchée** $((n-1)-(r-1))$ **fois et enfin touchée au** $n^{\text{ième}}$ **tir.**

Sur les $(n-1)$ **premiers tirs, on a** $\binom{n-1}{r-1}$ **choix possibles pour les tirs de laser qui atteignent la bactérie.**

On en déduit alors que : $\mathbb{P}(X=n)=\binom{n-1}{r-1}p^{r-1}\times(1-p)^{(n-1)-(r-1)}\times p=\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$.

② **La série entière** $\sum\limits_{k\geq0}x^k$ **est de rayon** 1 **et** $\forall x\in]-1,1[,\sum\limits_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$**, donc la série dérivée d'ordre** q**,** $\sum\limits_{k\geq q}(x^k)^{(q)}=\sum\limits_{k\geq q}\frac{k!}{(k-q)!}x^{k-q}$ **est de rayon** 1 **et** $\sum\limits_{k=q}^{+\infty}\frac{k!}{(k-q)!}x^{k-q}=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(q)}\underset{\textbf{Récurrence sur } q}{=}\frac{q!}{(1-x)^{q+1}}$

Il s'ensuit que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum_{k\geq q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ **converge et** $\sum_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

③ **Comme** $X(\Omega) = [\![r,+\infty[\![$ **et** $\forall n \geq r,\ \mathbb{P}(X=n)\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$, **alors**

$$\begin{array}{rcl} X \text{ admet une espérance} & \iff & \text{La famille } (n\mathbb{P}(X=n))_{n\geq r} \text{ est sommable} \\ & \underset{\text{Car } \forall n\geq r,\ n\mathbb{P}(X=n)\geq 0}{\iff} & \text{La série } \sum_{n\geq r} n\mathbb{P}(X=n) \text{ converge} \end{array}$$

On a $\forall n \geq r,\ n\mathbb{P}(X=n) = n\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r} = rp^r(\binom{n}{r}(1-p)^{n-r})$, **puisque** $1-p \in]0,1[$, **d'après la question précédente, la série** $\sum_{n\geq r}\binom{n}{r}(1-p)^{n-r}$ **converge et sa somme vaut** $\frac{1}{p^{r+1}}$, **par suite la série** $\sum_{n\geq r} n\mathbb{P}(X=n) = rp^r\sum_{n\geq r}\binom{n}{r}(1-p)^{n-r}$ **convere, ainsi** X **admet une espérance et** $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=r}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = rp^r\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}(1-p)^{n-r} = \frac{rp^r}{p^{r+1}} = \frac{r}{p}$ ⊠

Solution de l'exercice №9 **Retour à l'énoncé**

Puisque $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0,1\}$, **alors** $Y(\Omega) = Z(\Omega) = \{0,1\}$, **donc** Y **et** Z **suivent une loi de Bernoulli.**

• **Comme** $(Y=1) = (X_1=1)\cap(X_2=1)$ **et** X_1, X_2 **indépendantes,**
alors $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=1) = p^2$, **d'où** $Y \sim \mathcal{B}(p^2)$.

• **Comme** $(Z=0) = (X_1=0)\cap(X_2=0)$ **et** X_1, X_2 **indépendantes,**
alors $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=0) = (1-p)^2$, **d'où** $Z \sim \mathcal{B}(1-(1-p)^2)$ ⊠

Solution de l'exercice №10 **Retour à l'énoncé**

① **L'application** $f : x \mapsto \cos(\pi x)$ **est continue sur** $\mathbb{R}$ **et** X **est une variable aléatoire réelle, alors** $Y = f(X)$ **est une variable aléatoire réelle.**

② **Comme** $X(\Omega) = \mathbb{N}$, **alors** $Y(\Omega) = \{-1,+1\}$, **puisque** $\mathbb{P}(Y=-1)+\mathbb{P}(Y=1) = 1$, **il suffit de déterminer** $\mathbb{P}(Y=1)$.

$$\begin{array}{rcl} Y = 1 & \iff & \cos(\pi X) = 1 \\ & \underset{k\in\mathbb{N} \text{ car } X \text{ est positive}}{\iff} & \exists k \in \mathbb{N}, \pi X = 2\pi k \\ & \iff & \exists k \in \mathbb{N}, X = 2k \end{array}$$

Ainsi $(Y=1) = \bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=2k)$, **comme les événements,** $(X=2k)$ **sont deux à deux incompatibles, alors**

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(Y=1) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=2k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2k) \\ & = & \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda}ch(\lambda) \end{array}$$

Par suite la loi de Y **est caractérisé par** $Y(\Omega) = \{-1,+1\}$, $\mathbb{P}(Y=+1) = e^{-\lambda}ch(\lambda)$ **et** $\mathbb{P}(Y=+1) = 1-e^{-\lambda}ch(\lambda) = e^{-\lambda}sh(\lambda)$ ⊠

Solution de l'exercice №11 **Retour à l'énoncé**

① **Soit** $k \in \mathbb{N}^*$ **et** $\omega \in \Omega$.

$$\begin{array}{rcl} \omega \in (Y_n > k) & \iff & Y_n(\omega) > k \\ & \iff & \min_{1\leq i\leq n}(X_i(\omega)) > k \\ & \iff & \forall i \in [\![1,n]\!]\ X_i(\omega) > k \\ & \iff & \forall i \in [\![1,n]\!]\ \omega \in (X_i > k) \\ & \iff & \omega \in \bigcap_{1\leq i\leq n}(X_i > k) \end{array}$$

On déduit alors que, $(Y_n > k) = \bigcap\limits_{1\leq i\leq n}(X_i > k)$**, puisque** $X_1, ..., X_n$ **indépendantes et de meme loi, alors**

• **On a** $\mathbb{P}(Y_n > k) = \mathbb{P}(\bigcap\limits_{1\leq i\leq n}(X_i > k)) = \prod\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i > k) = (\mathbb{P}(X_1 > k))^n$

Comme $\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum\limits_{j=k+1}^{+\infty}p(1-p)^{j-1} = p\sum\limits_{j=k}^{+\infty}(1-p)^j = p\dfrac{(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k$

Alors $\mathbb{P}(Y_n > k) = (1-p)^{nk}$**.**

• $\mathbb{P}(Y_n \leq k) = 1 - \mathbb{P}(Y_n > k) = 1 - (1-p)^{nk}$**.**

• **Comme** $(Y_n = k) = (Y_n \leq k) \setminus (Y_n \leq k-1)$ **et** $(Y_n \leq k-1) \subset (Y_n \leq k)$**, alors** $\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_n \leq k) - \mathbb{P}(Y_n \leq k-1) = (1-(1-p)^{nk}) - (1-(1-p)^{n(k-1)}) = (1-p)^{n(k-1)} - (1-p)^{nk}$**.**

② **On a** $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ **et** $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y_n = k) = (1-p)^{n(k-1)} - (1-p)^{nk} = (1-(1-p)^n)(1-(1-(1-p)^n))^{k-1}$

Ainsi Y_n **suit la loi géométrique de paramétre** $q = 1-(1-p)^n$**.**

Par suite $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{q} = \frac{1}{1-(1-p)^n}$ **et** $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1-q}{q^2} = \frac{(1-p)^n}{(1-(1-p)^n)^2}$**.**

Solution de l'exercice №12 Retour à l'énoncé

① **Pour tout** $k \in \mathbb{N}^*, (X = k) = (X > k-1) \setminus (X > k)$ **et** $(X > k) \subset (X > k)$**,**
alors $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$**, soit** $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} k(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}((k+1)\mathbb{P}(X > k) - k\mathbb{P}(X > k)) - n\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)
\end{aligned}$$

② **On suppose que** $\sum\limits_{k\geq 0}\mathbb{P}(X > k)$ **converge. Démontrer que** X **admet une espérance.**

Comme $\forall k\mathbb{P}(X = k) \geq 0$**, alors**

$$\begin{aligned}
X \text{ admet une espérance} &\iff \text{La famille } (k\mathbb{P}(X = k))_{k\in\mathbb{N}} \text{ est sommable} \\
&\iff \text{La série } \sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}(X = k) \text{ est convergente} \\
&\iff \text{La suite des sommes partielles } \left(\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est est majorée}
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n) \leq \sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X > k) \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > k) = M$**.**

③ **On suppose que** X **admet une espérance.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$**,** $\mathbb{P}(X > n) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k)$**, donc** $0 \leq n\mathbb{P}(X > n) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = k) \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$**.**

Comme X **admet une espérance, alors la série** $\sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}(X = k)$ **converge, par suite le reste d'ordre** n **:** $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$ **tend vers** 0**, ainsi** $(n\mathbb{P}(X > n))_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** 0**.**

En faisant tendre n **vers** $+\infty$**, dans l'inégalité de la question** 1**, on trouve**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > k)$$

Solution de l'exercice №13 Retour à l'énoncé

① **Comme les tirages sont successifs avec remise, alors** $\mathbb{P}(X \leq k) = \begin{cases} \frac{k^n}{N^n} = \left(\frac{k}{N}\right)^n & si\ k \in [\![0, N]\!] \\ 1 & si\ k \geq N \end{cases}$**.**

On a $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$ **et** $\forall k \in [\![1, N]\!]$,
Comme $(X = k) = (X \leq k) \setminus (X \leq k-1)$ **et** $(X \leq k-1) \subset (X \leq k)$,
alors $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$.

② **Comme** $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n & si\ k \in [\![0, N]\!] \\ 0 & si\ k > N \end{cases} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n & si\ k \in [\![0, N-1]\!] \\ 0 & si\ k \geq N \end{cases}$,
alors la série $\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X > k)$ **est convergente,**
d'après l'exercice précédent, X **admet une espérance et on a**

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

③ **On a** $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X)}{N} = \lim\limits_{N\to+\infty} 1 - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n = 1 - \int_0^1 x^n dx = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$ ⊠

<u>Solution de l'exercice №14</u> Retour à l'énoncé

① **On** $N(\Omega) = \{0, 1\}$ **et** $\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(N = 1) = \frac{1}{2}$, **donc** N **suit la loi de Bernoulli de paramètre** $\frac{1}{2}$.
② • **Si** $k = 1$, **alors** $S/[N = 1](\Omega) = [\![1, 4]\!]$ **et pour** $i \in [\![1, 4]\!]$ $\mathbb{P}(S = i/[N = 1]) = \frac{1}{4}$. **(**$S/[N = 1]$ **suit la loi uniforme sur** $[\![1, 4]\!]$**)**

i	**1**	**2**	**3**	**4**
$\mathbb{P}(S = i/[N = 1])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

• **Si** $k = 2$, **Notons** X_1 **le résultat du premier lancer et** X_2 **le résultat du deuxième lancer, alors** $S = X_1 + X_2$, **donc** $S/[N = 2](\Omega) = [\![2, 8]\!]$ **et on a**

j	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Cas possibles de (X_1, X_2) **tels que** $X_1 + X_2 = j$	$(1, 1)$	(1,2) (2,1)	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1	(2,4) (3,3) (4,2)	(3,4) (4,3)	(4,4)
$\mathbb{P}(S = j/[N = 2])$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

② **Comme** $(N = 1)$, $(N = 2)$ **est un système complet d'événements et** $S/[N = 1](\Omega) = [\![1, 4]\!]$ **et** $S/[N = 2](\Omega) = [\![2, 8]\!]$, **alors** $S(\Omega) = [\![1, 8]\!]$, **pour tout** $k \in [\![1, 8]\!]$, **selon la formule des probabilités totales**

$$\mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}(S = k/[N = 1])\mathbb{P}(N = 1) + \mathbb{P}(S = k/[N = 2])\mathbb{P}(N = 2) = \frac{\mathbb{P}(S = k/[N = 1]) + \mathbb{P}(S = k/[N = 2])}{2}$$

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\mathbb{P}(S = k)$	$\frac{4}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}$

Comme $S(\Omega)$ **est fini, alors** $\mathbb{E}(S)$ **et** $\mathbb{V}(S)$ **existent et on a**
$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^{8} k\mathbb{P}(S = k) = \dfrac{15}{4}$, $\mathbb{E}(S^2) = \sum_{k=1}^{8} k^2\mathbb{P}(S = k) = \dfrac{35}{2}$ **et** $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - (\mathbb{E}(S))^2 = \frac{55}{16}$ ⊠

<u>Solution de l'exercice №15</u> Retour à l'énoncé

On sait que la série entière $\sum_{k\geq 0} x^k$ **est de rayon** 1 **et** $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$, **donc la série dérivée** $\sum_{k\geq 0} kx^{k-1}$ **est de rayon** 1 **et** $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, **par suite la série** $\sum_{k\geq 0} kx^k$ **est de rayon** 1 **et** $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

① **Montrons que la famille** $\left(\frac{n+m}{2^{n+m}}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ **est sommable.**
• **Soit** $m \in \mathbb{N}$, **fixé. Montrons que la série** $\sum_{n\geq 0} x_{n,m}$ **converge.**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n,m}=\frac{n+m}{2^{n+m}}=\frac{1}{2^m}\left(n(\frac{1}{2})^n+m(\frac{1}{2})^n\right)$.
Comme les séries $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **et** $\sum_{n\geq 0}n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **convergent, alors la série** $\sum_{n\geq 0}x_{n,m}$ **converge et on a**

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}=\frac{1}{2^m}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n+m\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{2^m}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}+m\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{m+1}{2^{m-1}}$$

• **Montrons que la série** $\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}\right)$ **converge.**

Pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}=\frac{m+1}{2^{m-1}}=m\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$.
Comme les séries $\sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$ **et** $\sum_{m\geq 0}m\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$ **convergent, alors la série** $\sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}\right)$ **converge.**
Par suite la famille $\left(\frac{n+m}{2^{n+m}}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ **est sommable et sa somme**

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}x_{n,m}=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{2^{m-1}}=\sum_{m=0}^{+\infty}m\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}+\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}+2.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=8$$

② **(a) Pour tout** $n,m\in\mathbb{N}$, $p_{n,m}=\frac{n+m}{2^{n+m+3}}=\frac{1}{8}x_{n,m}\geq 0$ **et la famille** $(p_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ **est sommable de somme** 1**, car la famille** $(x_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ **est sommable de somme** 8**.**
Donc la famille $(p_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ **définit bien une loi conjointe.**
(b) Soient $n,m\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X=n)=\sum_{m=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=m)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{n+m}{2^{n+m+3}}=\frac{1}{2^{n+3}}\left(n\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m+\sum_{m=0}^{+\infty}m\left(\frac{1}{2}\right)^m\right)=\frac{1}{2^{n+3}}(2n+2)=\frac{n+1}{2^{n+2}}$$

$$\mathbb{P}(Y=m)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=m)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+m}{2^{n+m+3}}=\frac{1}{2^{m+3}}\left(m\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{2^{m+3}}(2m+2)=\frac{m+1}{2^{m+2}}$$

Comme $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}$ **et** $\forall k\in\mathbb{N},\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)$**, alors** X **et** Y **suivent une meme loi.**
(c) On a $\mathbb{P}(X=0,Y=0)=0\neq\frac{1}{16}=\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$**, donc** X **et** Y **ne sont pas indépendantes** ⊠

Solution de l'exercice №16 **Retour à l'énoncé**
D'après le théorème de transfert, Y **admet une espérance si, et seulement si,** $(\frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ **est sommable.**
Comme $\forall k\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k+1)k!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}>0$**, il suffit de montrer que la série** $\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X=k)$ **est convergente, par le critère d'Alembert, cette série est convergente et on a**

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+k}\mathbb{P}(X=k)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)=\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\quad ⊠$$

Variables aléatoires de lois continues

Solution de l'exercice №17 **Retour à l'énoncé**
Comme X **suit la loi uniforme sur** $[0,1]$**, alors** $f_X(x)=\begin{cases}1 & si\ x\in[0,1]\\ 0 & si\ x\notin[0,1]\end{cases}$.

Soit $t\in\mathbb{R}$, $F_Y(t)=\mathbb{P}(Y\leq t)=\mathbb{P}(-\ln(X)\leq t)=\mathbb{P}(\ln(X)\geq -t)=\mathbb{P}(X\geq e^{-t})=\int_{e^{-t}}^{+\infty}f_X(x)dx$.
Si $t<0$**, alors** $e^{-t}>1$**, par suite** $F_Y(t)=0$.
Si $t\geq 0$**, alors** $e^{-t}\leq 1$**, donc** $F_Y(t)=\int_{e^{-t}}^{1}dx=1-e^{-t}$.
D'où $F_Y(t)=\begin{cases}0 & si\ t<0\\ 1-e^{-t} & si\ t\geq 0\end{cases}$ **comme** F_Y **est continue sur** $\mathbb{R}$ **et de classe** C^1 **sur** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$**, alors** Y **est**

de loi continue et sa fonction de densité f_Y est donnée par $f_Y(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ e^{-t} & si\ t > 0 \end{cases}$.
Ainsi Y suit la loi exponentielle de paramétre $\lambda = 1$, par suite $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} = 1$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$ ⊠

Solution de l'exercice №18 **Retour à l'énoncé**

Comme X suit la loi normale centrée réduite, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$.

En particulier $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du = 1$.

① **On a**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt \underset{t=\frac{u^2}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\frac{u}{\sqrt{2}}}(udu) = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{2}\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty} f_X(u)du$$
$$\underset{\text{Car} f_X \text{ est pair}}{=} \sqrt{2}\sqrt{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du}{2} = \sqrt{\pi}$$

② **(a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x)$.**
Si $x < 0$, alors $(X^2 \leq x) = \varnothing$, d'où $F_Y(x) = 0$.
Si $x \geqslant 0$, alors $(X^2 \leq x) = (-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x})$,
d'où $F_Y(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f_X(t)dt = 2\int_0^{\sqrt{x}} f_X(t)dt = 2\left(\int_{-\infty}^{\sqrt{x}} f_X(t)dt - \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt\right) = 2\left(F_X(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\right)$.
Ainsi $F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(\sqrt{x}) - 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$
(b) On a F_Y est continue sur $\mathbb{R}$, puisque F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, alors F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ainsi Y suit une loi à densité f_Y donée par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} (2F_X(\sqrt{x}) - 1)' & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\frac{1}{2\sqrt{x}}F_X'(\sqrt{x}) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que $Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$⊠

Solution de l'exercice №19 **Retour à l'énoncé**

① **Comme $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto [x] \end{cases}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et X est une variable aléatoire réelle, alors $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire réelle.**
② **Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(Y = k-1) = ([X] = k-1) = (k-1 \leq X < k)$.**
Donc $\mathbb{P}(Y = k-1) = \mathbb{P}(k-1 \leq X < k) = \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{k-1}^{k} = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}$.
③ **Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y+1 = k) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = (1-e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)} = (1-e^{-\lambda})(1-(1-e^{-\lambda}))^{k-1}$, donc $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $(1-e^{-\lambda})$.**
④ **Comme $Y+1 \sim \mathcal{G}(1-e^{-\lambda})$, alors $\mathbb{E}(Y+1) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$ et $\mathbb{V}(Y+1) = \frac{1-(1-e^{-\lambda})}{(1-e^{-\lambda})^2} = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$.**
Puisque $\mathbb{E}(Y+1) = \mathbb{E}(Y)+1$ et $\mathbb{V}(Y+1) = \mathbb{V}(Y)$, alors $\mathbb{E}(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$ ⊠

Solution de l'exercice №20 **Retour à l'énoncé**

① **L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x}{y} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (c'est une fraction rationnelle en x, y) et X, Y deux variables aléatoires réelles tels que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}^*$, alors $T = \varphi(X,Y)$ est une variable aléatoire réelle.**
② **Comme Y suit la loi géométrique, alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{k\}$,**

donc $\Omega = Y^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} Y^{-1}(\{k\}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} (Y=k)$.

Soit $t\in\mathbb{R}$, $(T>t) = (T>t)\cap\Omega = (T>t)\cap\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}(Y=k)\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}(T>t)\cap(Y=k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}(X>tk)\cap(Y=k)$.

③ **Soit** $t\in\mathbb{R}$, **comme** X **et** Y **sont indépendantes et les événements** $(X>tk)\cap(Y=k)$ **sont deux à deux incompatibles, alors**

$\mathbb{P}(T>t) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}(X>tk)\cap(Y=k)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}((X>tk)\cap(Y=k)) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X>tk)\mathbb{P}(Y=k)$.

Puisque X **suit la loi exponentielle de paramètre** λ, **alors sa fonction de densité est donnée par** $f_X(x) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & si\ x\geq 0\\ 0 & si\ x<0\end{cases}$.

Si $t\geq 0$, **alors** $tk\geq 0$, **donc** $\mathbb{P}(X>tk) = \int_{tk}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{tk}^{+\infty} = e^{-\lambda tk}$.

Comme Y **suit la loi géométrique de paramètre** p, **alors** $\mathbb{P}(Y=k) = p(1-p)^{k-1}$.

Par suite $\mathbb{P}(T>t) = \sum_{k=1}^{+\infty}e^{-\lambda tk}p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left((1-p)e^{-\lambda t}\right)^k \underset{0<(1-p)e^{-\lambda t}<1}{=} \frac{p}{(1-p)}\frac{(1-p)e^{-\lambda t}}{1-(1-p)e^{-\lambda t}}$.

D'où $\mathbb{P}(T>t) = \frac{pe^{-\lambda t}}{1-(1-p)e^{-\lambda t}}$.

Si $t<0$, **alors** $tk<0$, **donc** $\mathbb{P}(X>tk) = \int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 1$.

Par suite $\mathbb{P}(T>t) = \sum_{k=1}^{+\infty}p(1-p)^{k-1} = 1$.

④ **Soit** $t\in\mathbb{R}, F_T(t) = \mathbb{P}(T\leq t) = 1-\mathbb{P}(T>t) = \begin{cases}1-\frac{pe^{-\lambda t}}{1-(1-p)e^{-\lambda t}} & si\ t\geq 0\\ 0 & si\ t<0\end{cases}$.

Comme F_T **est continue sur** $\mathbb{R}$ **et de classe sur** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, **alors** T **suit une loi continue et sa fonction de densité** f_T **est donnée par :** $f_T(t) = \begin{cases}F_T'(t) & si\ t>0\\ 0 & si\ t\leq 0\end{cases} = \begin{cases}\frac{\lambda pe^{-\lambda t}}{(1-(1-p)e^{-\lambda t})^2} & si\ t>0\\ 0 & si\ t\leq 0\end{cases}$ ⊠

Solution de l'exercice №21 **Retour à l'énoncé**

① **Soit** $n\in\mathbb{N}$. **La fonction** g_n **est continue sur** $[0,+\infty[$ **(donc le problème se pose au voisinage de** $+\infty$**), comme** $x^2g_n(x) = x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ **et** $\alpha = 2>1$, **alors** g_n **est intégrable sur** $[0,+\infty[$.

② **Soit** $n\in\mathbb{N}$,

(a) **Pour tout** $a>0$,

$$\begin{aligned}I_{n+2}(a) = \int_0^a g_{n+2}(x)dx &= \int_0^a x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\int_0^a x^{n+1}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'dx\\ &\underset{I.P.P}{=} -\left[x^{n+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^a + (n+1)\int_0^a x^ne^{-\frac{x^2}{2}}dx\\ &= -a^{n+1}e^{-\frac{a^2}{2}} + (n+1)I_n(a)\end{aligned}$$

Ainsi $I_{n+2}(a) = -a^{n+1}e^{-\frac{a^2}{2}} + (n+1)I_n(a)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}, g_n$ **est intégrable, en faisant tendre** a **vers** $+\infty$, **on trouve** $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

(b) **On a** $I_0 = \int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \underset{\text{par parité de } x\mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$

Comme la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $x\mapsto\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ **vérifie** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = 1$, **alors** $I_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(c) • $I_1 = \int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}} = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1$.

- **Par réccurence, en utilisant la relation** $I_{n+2} = (n+1)I_n$, **on montre que,** $\forall n\geq 1$ $I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^nn!}$ **et**

$I_{2n+1} = 2^n n!$

③ **Soit g la fonction définie pour tout réel x par :** $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \textbf{si } x \geq 0, \\ 0 & \textbf{si } x < 0. \end{cases}$

(a)

- On a g est continue sur $\mathbb{R}$,

- g est positive sur $\mathbb{R}$,

- Comme g est nulle sur $]-\infty, 0]$ et g_1 est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors g est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} g_1(x)dx = I_1 = 1$$

Alors g est une densité de probabilité.

(b) • Comme $x \mapsto xg(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $x \mapsto xg(x) = xg_1(x) = g_2(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors $x \mapsto xg(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite X admet une espérance et on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \int_0^{+\infty} xg_1(x)dx = \int_0^{+\infty} g_2(x)dx = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

• Comme $x \mapsto x^2 g(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $x \mapsto x^2 g(x) = x^2 g_1(x) = g_3(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, alors $x \mapsto x^2 g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite X^2 admet une espérance et on a

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 g_1(x)dx = \int_0^{+\infty} g_3(x)dx = I_3 = 2I_1 = 2$$

Puisque X^2 admet une espérance, alors X admet une variance et on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$,

• $G(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x)$.

Si $x < 0$, alors $(X^2 \leq x) = \varnothing$, d'où $G(x) = 0$.

Si $x \geq 0$, alors $(X^2 \leq x) = (-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$, donc

$$G(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} g(t)dt = \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} g(t)dt - \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} g(t)dt = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$$

Comme g est nulle sur $]-\infty, 0]$, alors $F(-\sqrt{x}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-\sqrt{x}} g(t)dt = 0$, par suite $G(x) = F(\sqrt{x})$

On conclut, alors $G(x) = \begin{cases} F(\sqrt{x}) & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$

• On a g est continue sur $\mathbb{R}$, alors F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,

Comme $G(x) = F(\sqrt{x}) \underset{x \to 0^+}{\to} F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = 0$, car g est nulle sur $]-\infty, 0]$ et $G(x) \underset{x \to 0^-}{\to} 0$ d'où G est continue en 0, par suite G continue sur $\mathbb{R}$.

Puisque $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, alors $x \mapsto F(\sqrt{x})$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, par suite G est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Par suite Y est est une variable à densité.

• La fonction de densité de Y est donnée par :

$g_Y(x) = \begin{cases} (F(\sqrt{x}))' & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} g(\sqrt{x}) & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$

C'est la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$, ainsi Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$

Par suit $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 2$ ⊠

Fonctions génératrices

Solution de l'exercice №22 **Retour à l'énoncé**

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k le numéro du k-ième tirage.

On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, comme les tirages avec remise, alors les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et de meme loi, alors pour tout $t \in]-1,1[, G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k})(t) = (G_{X_1}(t))^n$.

La loi de X_1 est donnée par :

i	**0**	**1**	**2**
$\mathbb{P}(X_1 = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Pour tout $t \in]-1,1[, G_{X_1}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(X_1 = i)t^i = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)^2$, alors $G_{S_n}(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)^{2n} = \left((1-\frac{1}{2})t + \frac{1}{2}\right)^{2n}$, c'est la fonction génératrice de la loi binomiale de paramètre $(2n, \frac{1}{2})$,
d'où $S_n \sim \mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$ ⊠

<u>Solution de l'exercice №23</u> Retour à l'énoncé
Comme $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_{X_1+X_2+...+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(t-1)} = e^{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t-1)}$$

On trouve la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k > 0$, comme la fonction génératrice caractérise la loi, alors $X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ ⊠

Inégalités et théorèmes limites

<u>Solution de l'exercice №24</u> Retour à l'énoncé
① Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors X est positive, or X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$, par l'inégalité de Markov, on a

$$\mathbb{P}(X \geqslant n^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{n^2} = \frac{1}{n}$$

② On peut remarquer que $(X \geq 2n) = (|X - n| \geq n) = (|X - \mathbb{E}(X)| \geq n)$, car X est positive. Or X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2} = n^2 - n$, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2n) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq n) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

<u>Solution de l'exercice №25</u> Retour à l'énoncé
Comme X_n et X sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{P}(X = k)$.
en effet :
$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!}(1-p_n)^{n-k}$
Comme $(1-p_n)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-p_n)} = e^{-(n-k)p_n \frac{\ln(1-p_n)}{-p_n}} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\lambda}$, car $np_n \underset{n\to+\infty}{\to} \lambda$ et $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
Par suite $\frac{\lambda^k}{k!}(1-p_n)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \mathbb{P}(X = k)$, ainsi $\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{P}(X = k)$ ⊠

<u>Solution de l'exercice №26</u> Retour à l'énoncé
Comme $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de meme loi admettant un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}(X_n) = 1$, $\mathbb{V}(X_n) = 1$, par le théorème central limite, $\left(\frac{X_1+...+X_n-n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers N où N suit la loi normale centrale réduite.
En particulier $\mathbb{P}\left(\frac{X_1+...+X_n-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}$, car f_N est paire.
D'autre part $X_1 + ... + X_n$ suit la loi de poisson de paramètre n,
donc $\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \mathbb{P}(X_1 + ... + X_n \leq n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$ ⊠