TD : Espaces vectoriels

MPSI1

Ex18 :

On sait que $A\cap B \subset A$ et $A\cap B\subset B$

donc : $\begin{cases} Vect(A\cap B) \subset Vect(A) \\ Vect(A\cap B) \subset Vect(B). \end{cases}$

par suite $\boxed{Vect(A\cap B) \subset Vect(A)\cap Vect(B)}$

Rq : l'inclusion peut être stricte

Exple : $E = \mathbb{R}$, $A=\{1\}$, $B=\{2\}$.

→ $A\cap B = \phi$, donc $Vect(A\cap B)=\{0\}$

→ et $Vect(A)=\mathbb{R}$, $Vect(B)=\mathbb{R}$

donc : $Vect(A\cap B) \subsetneq Vect(A)\cap Vect(B)$

Ex19 : A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-ev E.

Mq : $Vect(A\cup B) = Vect(A)+Vect(B)$.

[⊃]. On a : $A\subset A\cup B$ et $B\subset A\cup B$

donc : $\begin{cases} Vect(A)\subset Vect(A\cup B) \\ Vect(B)\subset Vect(A\cup B). \end{cases}$

d'où : $\boxed{Vect(A)+Vect(B)\subset Vect(A\cup B)}$ (1)

[⊂]. On a : $\begin{cases} A\subset Vect(A)\subset Vect(A)+Vect(B) \\ B\subset Vect(B)\subset Vect(A)+Vect(B) \end{cases}$

donc : $A\cup B \subset Vect(A)+Vect(B)$

d'où $\boxed{Vect(A\cup B)\subset Vect(A)+Vect(B)}$ (2)

(car $Vect(A)+Vect(B)$ est un espace vect.).

De (1) et (2) :

$Vect(A\cup B) = Vect(A)+Vect(B)$

Ex21 :

$E=\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C})$, $F=\{f\in E / \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$

$G=\{f\in E / f \text{ constante}\}$.

Mq : $E = F\oplus G$.

i) Montrons d'abord que F et G sont des s-ev de E.

→ $F\neq\phi$, car $0_E\in F$.

→ Soit $f,g\in F$ et $\alpha\in\mathbb{C}$. On a :

$\int_{-1}^{1}(f+\alpha.g)(t)dt = \int_{-1}^{1} f(t)dt + \alpha.\int_{-1}^{1} g(t)dt = 0$

donc : $f+\alpha.g\in F$.

Ainsi F est un s-ev de E

→ De même pour G.

ii) Mq : $F\cap G = \{0_E\}$.

$f\in F\cap G \Rightarrow f\in F$ et $f\in G$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0$ et $\exists\alpha\in\mathbb{C} : f=\alpha$

$\Rightarrow 2\alpha = 0$ et $f=\alpha$

$\Rightarrow f\equiv 0.$

Donc $F\cap G \subset \{0_E\}$. Et comme $F\cap G$ est un s-ev de E, alors, $0_E \in F\cap G$

D'où : $\boxed{F\cap G = \{0_E\}}$. (1)

ii) Mq : $E = F+G$.

Soit $f\in E$. $\forall x\in[-1,1]$

Remarquons que : $f(x) = \underbrace{\left(f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt\right)}_{g(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt}_{h(x)}$

•) $h : x \longmapsto \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ est constante, dc $h\in G$

•) et on a : $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,dt\right)dx = 0$

donc $g\in F$.

Par suite $\forall f\in E : f = g+h \in F+G$

donc : $E \subset F+G$.

•) Or F et G sont des s-ev. de E, alors,

$F+G\subset E$

D'où $\boxed{E = F+G}$ (2)

C/C De (1) et (2) on obtient : $E = F\oplus G$.

Ex 22 :

$H = \{(x_1,\dots,x_n)\in \mathbb{K}^n / x_1+\dots+x_n = 0\}$

et $\vec{u} = (1,\dots,1)\in\mathbb{K}^n$.

Mq : $\mathbb{K}^n = H \oplus Vect(\vec{u})$.

i) Vérifions d'abord que H est un sev de $\mathbb{K}^n$.

→ Soit on utilise la définition d'un s-ev.

→ Ou bien : (autre méthode)

Considérons l'app. $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$
$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto x_1+\dots+x_n$

•) φ est linéaire (à vérifier)

•) $Ker\varphi = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n / x_1+\dots+x_n = 0\}$
$= H$.

donc H est un s-ev. de $\mathbb{K}^n$.

ii) On a : $H = Ker\varphi$

et φ est une forme linéaire non nulle (car $\varphi(\vec{u}) = n\neq 0$),

donc H est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$,

d'où : $\forall \vec{a}\in\mathbb{K}^n\setminus H$: $\mathbb{K}^n = H\oplus Vect(\vec{a})$.

En particulier pour $\vec{u}$:

puisque $\vec{u}\notin H$, alors :

$$\boxed{\mathbb{K}^n = H\oplus Vect(\vec{u})}.$$

Ex 28 :

$\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$f \longmapsto f''-3f'+2f$.

Mq : φ est un endomorphisme en précisant son noyau.

ii) Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a : $\varphi(f+\alpha\cdot g) = (f+\alpha g)'' - 3(f+\alpha g)' + 2(f+\alpha g)$

$= (f'' - 3f' + 2f) + \alpha\cdot(g'' - 3g' + 2g)$

$= \varphi(f) + \alpha\cdot\varphi(g)$,

donc : φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

iii) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

$f \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(f) = 0$

$\Leftrightarrow f'' - 3f' + 2f = 0$

Résolvons l'éq. diff. : (E_h) : $y'' - 3y' + 2y = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

donc l'éq. caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$

admet deux solutions : $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.

Donc la solution générale de (E_h) :

$y : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x}$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

D'où :

$f \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / f : x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x}$

$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}\{x \mapsto e^x ; x \mapsto e^{2x}\}}$.

Ex 35 :

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

a) Comparons $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Ker}(f+g)$.

Soit $x \in E$.

$x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \Rightarrow f(x) = 0_E$ et $g(x) = 0_E$

$\Rightarrow (f+g)(x) = 0_E$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(f+g)$.

Donc : $\boxed{\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f+g)}$.

Rq : L'inclusion peut être stricte :

Exple : $f : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x \end{array}$ (càd $f = Id_E$) et $g = -f$

$(E \neq \{0_E\})$.

On a donc : $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g = \{0_E\} \cap \{0_E\} = \{0_E\}$

et $\operatorname{Ker}(f+g) = \operatorname{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$

donc $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subsetneq \operatorname{Ker}(f+g)$.

b) Comparons $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im}(f+g)$:

Soit $y \in E$.

$y \in \operatorname{Im}(f+g) \Rightarrow \exists x \in E / y = (f+g)(x)$

$\Rightarrow \exists x \in E : y = \underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{g(x)}_{\in \operatorname{Im} g}$

$\Rightarrow y \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

Donc : $\boxed{\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g}$.

Rq : L'inclusion peut être stricte.

On prend l'exemple précédent :

$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im}(0_{\mathcal{L}(E)}) = \{0_E\} \\ \text{et } \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g = E \end{array}\right\}$ donc

$\operatorname{Im}(f+g) \subsetneq \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

c) Comparons $\ker f$ et $\ker f^2$:

Soit $x \in E$.

$x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0_E$

$\Rightarrow f(f(x)) = 0_E$

$\Rightarrow f^2(x) = 0_E$

$\Rightarrow x \in \ker f^2$,

donc $\boxed{\ker f \subset \ker f^2}$.

d) Comparons $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f^2$:

Soit $y \in E$.

$y \in \mathrm{Im} f^2 \Rightarrow \exists x \in E / y = f^2(x)$

$\Rightarrow \exists x \in E / y = f(f(x))$

$\Rightarrow y \in \mathrm{Im} f$.

Donc $\boxed{\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f}$.

Ex 36 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Mq : $\mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$

$\boxed{\Rightarrow}$ On sup. que $\mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0_E\}$.

$\rightarrow$ $\ker f \subset \ker f^2$: cette inclusion est tjrs vraie (voir l'ex 35).

$\rightarrow$ mq $\ker f^2 \subset \ker f$.

$x \in \ker f^2 \Rightarrow f^2(x) = 0_E$

$\Rightarrow f(x) \in \ker f$

$\Rightarrow f(x) \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$ (car $f(x) \in \mathrm{Im} f$)

$\Rightarrow f(x) = 0_E$ (car $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\}$)

$\Rightarrow x \in \ker f$, donc :

$\ker f^2 \subset \ker f$. D'où $\ker f = \ker f^2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\ker f = \ker f^2$:

Soit $x \in E$.

$x \in \ker f \cap \mathrm{Im} f \Rightarrow f(x) = 0_E$ et $\exists x' \in E$ tq $x = f(x')$

$\Rightarrow f(x) = 0_E$ et $f(x) = f^2(x')$ et $x = f(x')$

$\Rightarrow f^2(x') = 0_E$ et $x = f(x')$

$\Rightarrow f(f(x')) = 0_E$ et $x = f(x')$

$\Rightarrow x' \in \ker f^2$, et, $x = f(x')$

$\Rightarrow x' \in \ker f$ et $x = f(x')$ (car $\ker f = \ker f^2$)

$\Rightarrow x = f(x') = 0_E$

donc $\ker f \cap \mathrm{Im} f \subset \{0_E\}$. Or $\ker f \cap \mathrm{Im} f$ est un s-ev. de E, alors $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0_E\}$.

b) Mq : $E = \mathrm{Im} f + \ker f \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On sup. que $E = \mathrm{Im} f + \ker f$. Mq $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

$\rightarrow$ On a tjrs : $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (Voir l'exo. 35).

$\rightarrow$ Soit $y \in E$ tq $y \in \mathrm{Im} f$.

$y \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists x \in E / y = f(x)$

or $E = \mathrm{Im} f + \ker f$, alors : $x = x_1 + x_2$ avec $\begin{cases} x_1 \in \mathrm{Im} f \\ x_2 \in \ker f \end{cases}$

donc $y = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + \underbrace{f(x_2)}_{= 0_E}$

$= f(x_1)$

$x_1 \in \mathrm{Im} f$, donc, $\exists x_1' \in E$: $x_1 = f(x_1')$,

donc : $y = f(f(x_1')) = f^2(x_1') \in \mathrm{Im} f^2$.

D'où, $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$, ainsi : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

$\rightarrow$ D'abord : $\mathrm{Im} f + \ker f \subset E$ (car $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont des sev de E)

$\rightarrow$ Soit $x \in E$. On sait que $f(x) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

donc $\exists x' \in E$ tq : $f(x) = f^2(x')$.

donc: $f(x-f(x'))=0_E$,
par suite $x-f(x')\in \ker f$.
On a donc: $x = \underbrace{x-f(x')}_{\in \ker f} + \underbrace{f(x')}_{\in \operatorname{Im} f} \in \operatorname{Im} f+\ker f$

ceci pour tout $x\in E$, donc: $\underline{E\subset \operatorname{Im} f+\ker f}$

D'où: $\boxed{E=\operatorname{Im} f+\ker f}$.

Ex 37 :

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tq: $f^2-3f+2Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$

a) Mq: $f\in GL(E)$.

On a: $f^2-3f+2Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$

donc: $Id_E = f\circ\left(\frac{1}{2}(f-3Id_E)\right)$
$= \frac{1}{2}(f-3Id_E)\circ f$.

ainsi: $f\in GL(E)$ et $f^{-1}=\frac{1}{2}(f-3Id_E)$.

b) Mq: $E=\ker(f-Id_E)\oplus\ker(f-2Id_E)$.

→ Soit $x\in E$.

$x\in \ker(f-Id_E)\cap\ker(f-2Id_E)$

$\Rightarrow (f-Id_E)(x)=(f-2Id_E)(x)=0_E$

$\Rightarrow f(x)=x$ et $f(x)=2x$

$\Rightarrow x=0_E$,

donc $\ker(f-Id_E)\cap\ker(f-2Id_E)\subset\{0_E\}$

puis $\ker(f-Id_E)\cap\ker(f-2Id_E)=\{0_E\}$. ①

→ Soit $x\in E$. On a:

$\left(\begin{array}{l}\cancel{x=(f(x)-x)+(2x-f}\\ \cancel{x=(x-f(x))+f(x)-}\end{array}\right)$

$x=(f(x)-x)-(f(x)-2x)$

et $(f-2Id_E)(f(x)-x)=(f-2Id_E)\circ(f-Id_E)(x)$
$=(f^2-3f+2Id_E)(x)$
$=0_E$ (car $f^2-3f+2Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$)

de même :

$(f-Id_E)(f(x)-2x)=(f-Id_E)\circ(f-2Id_E)(x)$
$=(f^2-3f+2Id_E)(x)$
$=0_E$

donc: $\begin{cases} (f(x)-x)\in\ker(f-2Id_E)\\ f(x)-2x\in\ker(f-Id_E).\end{cases}$

par suite: $x=(f(x)-x)-(f(x)-2x)\in\ker(f-2Id_E)+\ker(f-Id_E)$

D'où: $E\subset\ker(f-2Id_E)+\ker(f-Id_E)$

D'où $E=\ker(f-2Id_E)+\ker(f-Id_E)$. ②

(car $\ker(f-2Id_E)$ et $\ker(f-Id_E)$ sont des s-ev de E).

De ① et ② on a:

$E=\ker(f-2Id_E)\oplus\ker(f-Id_E)$.